第 26 卷 第 2 期 周口师范学院学报 2009 年 3 月
Vol. 26 No. 2 Journal of Zhoukou Normal University Mar. 2009

基于集对逻辑与不确定集对分析的应用

王万军
(甘肃联合大学 数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730000)

摘 要:在集对分析理论基础上,结合不确定性问题的特点,提出了基于集对逻辑与不确定集对分析的方法、定义和概念,讨论了其有关的运算和性质.最后通过实例表明,该方法是一种结果合理、结论正确、行之有效的方法.

关键词:集对逻辑;不确定性;集对分析
中图分类号: TP301;O213 **文献标识码**: A **文章编号**:1671-9476(2009)02-0038-03

集对分析[1](Set pair analysis,简写 SPA)是一种新的关于研究确定与不确定系统同异反定量分析的系统分析方法,它是由赵克勤先生于 1989 年提出的.它的核心思想是同异反方面对集对某一特性的联系定性分类和定量刻划,并找出事物之间的联系与转化,将确定与不确定视为一个系统,从事物之间的联系与转化的同一度、差异度和对立度方面刻划事物.集对分析的基本概念是集对与联系数,其联系定量刻划用如下的联系度表达式来表示:

$$\mu = a + bi + cj$$

其中 a 表示两个集合的同一程度,称为同一度;b 表示两个集合的差异程度,称为差异度;c 表示两个集合的对立程度,称为对立度.i 为差异度标识符号或相应系数,取值于 $[-1,1]$;j 为对立标记符号或相应系数,取值为 -1.根据定义,a,b,c 满足归一化条件 $a+b+c=1$.在联系度表达式中,a,c 是相对确定的,而 b 是相对不确定的.这是对确定与不确定性的定量描述,是从事物的同(同一)、异(差异)、反(对立)三个方面反映不确定性的.因此,上式又称为同异反联系数或三元联系数,它已经广泛地应用在各领域[1].

由于人们在认识世界的同时,表现出的不完备与不全面性,造成了对客观现象认识时的主观性和模糊性,即不确定性.到目前为止,人们提出了好多解决不确定性问题的数学方法,诸如 L. A. Zadeh 提出的模糊数学[2],他把 Cantor 集合的特征函数值域 $\{0,1\}$ 推广到用隶属函数的值域 $[0,1]$ 来表示模糊不确定性.虽然该方法在信息、系统和控制等领域得到了广泛的应用,但实际上人们对事物的认识是主体与客体的不确定性,而这种不确定性常常由于被观察对象的相对独立而具有随机不确定性.因此,用模糊数学来刻划一个模糊不确定性,在本质上仍然是用传统数学的理论与方法.

逻辑学是研究人类思维的结构,包括概念、判断和推理形式的一门科学,形式逻辑是建立在经典集合基础之上的研究思维法则的确定性的.由于形式逻辑自身的特点原因,L. A. Zadeh 在模糊数学的基础上又提出了模糊逻辑的理论,它是建立在模糊集合之上的研究思维法则的模糊性的,模糊性是普遍存在的.而世界万物实际上是运动的、变化的,矛盾是事物发展的内在动力.如何将矛盾问题进行解决,寻找矛盾问题的规律和方法,进行矛盾问题的逻辑推理,就必须突破已有的逻辑约束,建立新的研究思维的动态性、转化规律及方法的逻辑,从而形成了可拓逻辑[3].可拓逻辑是研究事物从是向非或从非向是逻辑转化的方法和规律的逻辑.事物在转化时,往往会出现不确定性,不确定性是自然界中存在的一种客观现象.在集对分析理论基础上,本文提出了集对逻辑[4]与不确定分析理论与应用,并通过例子说明了该方法的有效性和合理性.

1 集对逻辑与不确定集对分析理论

1.1 不确定集对分析

收稿日期:2008-08-01
作者简介:王万军(1974 -),男,甘肃天水人,讲师,主要从事粗集理论、集对分析理论以及数据挖掘等研究.

定义 1　设论域 μ 上的集对 A:对于论域中给出的信息 x, x 关于 A 的同一度隶属度 $a = \mu_A(x) \in [0,1]$; x 关于 A 的差异度隶属度 $b = \mu_B(x) \in [0,1]$; x 关于 A 的对立度隶属度 $c = \mu_C(x) \in [0,1]$; 且对论域中给出的任意信息 x 均有: $a + b + c = 1$; 则称这样的集对为不确定性集对.

定义 2　由不确定性同异反刻划集对的联系度为

$$\mu_A(x) + \mu_B(x)i + \mu_C(x)j,$$

称此联系度为不确定性联系度.

不确定性联系度是描述主观认识与客观认识现象的不确定关系,它与模糊集对[3] 有联系且又有所不同. 模糊集对刻划的是局限在"真"与"假"的通过隶属函数表示的事物相对真假的程度. 不确定集对不仅能够刻划模糊集对的性质,而且同时保证信息的完整性,是全面对事物同异反的刻划. 而模糊集对是以对立刻划为特征,分别作出了确定与不确定的程度,它相当于从模糊信息的同异反中去研究和度量事物的联系. 更重要的是,不确定集对对事物的联系描述更合理,刻划更准确.

1. 2　不确定集对的运算及性质

设 A、B 的不确定性联系数分别为 $\mu_A = \mu_{AA}(x) + \mu_{BA}(x)i + \mu_{CA}(x)j$ 和 $\mu_B = \mu_{AB}(x) + \mu_{BB}(x)i + \mu_{CB}(x)j$,则此时有

$$\mu_A \cap \mu_B = a + bi + cj,$$

其中 $a = \min(\mu_{AA}(x), \mu_{AB}(x))$, $c = \max(\mu_{CA}(x), \mu_{CB}(x))$, $b = 1 - a - c$.

$$\mu_A \cup \mu_B = a + bi + cj,$$

其中 $a = \max(\mu_{AA}(x), \mu_{AB}(x))$, $c = \min(\mu_{CA}(x), \mu_{CB}(x))$, $b = 1 - a - c$.

$$\sim \mu_A = a + bi + cj,$$

其中 $a = \mu_{CA}(x)$, $c = \mu_{AA}(x)$, $b = 1 - a - c$.

$$\sim \mu_B = a + bi + cj,$$

其中 $a = \mu_{CB}(x)$, $c = \mu_{AB}(x)$, $b = 1 - a - c$.

不难看出,不确定集对 A、B、C 有如下性质:

1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;

2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

4) $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$;

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

6) $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$,
$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$;

(7) $\sim\sim A = A$, $\sim\sim B = B$.

1. 3　不确定集对逻辑

一个集对命题的真值指派可能因人而异,会出现一些差异,但它总能用一个联系数表示或给定,实际上在这个确定的真值中包含了不确定或差异. 结合集对理论及逻辑学内容,下面给出集对逻辑的定义:

定义 3　对于一个陈述句 P,其真值用 $\mu(P) = a + bi + cj$ 来表示,其中 $a + b + c = 1$, a, b, c 分别表示同一度、差异度和对立度,则称语句 P 为集对命题.

定义 4　由集对命题及其联结词构成的逻辑命题及其推理称为集对逻辑推理或集对逻辑变换.

定义 5　集对逻辑真值是对命题指派真值的一个联系数的表示.

这正是集对逻辑体现出事物确定与不确定的辩证关系,这种逻辑更适合人脑对问题的思考描述.

1. 4　不确定集对逻辑联结词及推理

下面给出集对逻辑中构成集对命题的常用联结词. 为了与经典数学逻辑相一致,所有联结词仍沿用数理逻辑中的联结词符号表示.

1) 合取联结词 $\wedge$ 对于 $A \wedge B$: $\mu = a + bi + cj$,其中 $a = \min(a_A, a_B)$, $c = \max(c_A, c_B)$, $b = 1 - a - c$.

2) 析取联结词 $\vee$. 对于 $A \vee B$: $\mu = a + bi + cj$,其中 $a = \max(a_A, a_B)$, $c = \min(c_A, c_B)$, $b = 1 - a - c$.

3) 蕴涵联结词(又称条件联结词) $\rightarrow$. 对于 $A \rightarrow B$: $\mu = a + bi + cj$,其中 $a = \max(c_A, a_B)$, $c = \min(a_A, c_B)$, $b = 1 - a - c$.

4) 等值联结词(又称双条件联结词) $\leftrightarrow$. 对于 $A \leftrightarrow B$: $\mu = a + bi + cj$,其中 $a = \max(\min(a_A, a_B), \min(c_A, c_B))$; $c = \min(\max(a_A, a_B), \max(c_A, c_B))$; $b = 1 - a - c$.

5) 否定联结词 $\neg$. 对于 $\neg A$: $\mu = a + bi + cj$,其中 $a = c_A$, $c = a_A$, $b = 1 - a - c$.

实际上有了集对逻辑及其联结词,进行集对逻辑或同异反推理[5,6] 就比较容易了.

2　应用实例及分析

下面给出一个具体的例子,说明该方法在学生评定成绩中的应用. 某班现有 10 名学生的成绩(如表 1 所示),试由成绩情况分析学生对 4 门课程的掌握情况.

表 1 10 名学生 4 门课程考试成绩

序号	语文	数学	物理	外语
1	85	63	74	81
2	70	85	73	65
3	90	65	80	55
4	75	80	68	73
5	50	90	85	74
6	80	65	70	50
7	76	56	85	70
8	65	80	73	60
9	77	65	58	50
10	82	63	50	62

通过表 1 构造出序号为 1,2,3,…,10 的 10 个学生 4 门课程的联系数分别如下(为叙述方便,只给出前 4 个学生 4 门课程成绩的联系数,其他 6 个序号学生的 4 门课程成绩的联系数略去):

$$\mu_1 = 0.63 + 0.22i + 0.15j,$$
$$\mu_2 = 0.70 + 0.15i + 0.15j,$$
$$\mu_3 = 0.55 + 0.35i + 0.10j,$$
$$\mu_4 = 0.68 + 0.12i + 0.20j.$$

并结合前面不确定集对逻辑的性质与运算可知:

$$\mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_4 = 0.70 + 0.20i + 0.10j,$$
$$\mu_1 \cap \mu_2 \cap \mu_3 \cap \mu_4 = 0.55 + 0.25i + 0.20j.$$

易知在 $\mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_4 = 0.70 + 0.20i + 0.10j$ 中,

$$a = \max(\mu_{AA}(x), \mu_{AB}(x)) = 0.70,$$
$$c = \min(\mu_{CA}(x), \mu_{CB}(x)) = 0.10,$$
$$b = 1 - a - c = 0.20.$$

同理,在 $\mu_1 \cap \mu_2 \cap \mu_3 \cap \mu_4 = 0.55 + 0.25i + 0.20j$ 中,

$$a = \min(\mu_{AA}(x), \mu_{AB}(x)) = 0.55,$$
$$c = \max(\mu_{CA}(x), \mu_{CB}(x)) = 0.20,$$
$$b = 1 - a - c = 0.25.$$

从而前 4 名学生综合成绩的掌握情况为:前 4 名学生的 4 门课程全部掌握的程度为 55 %,未掌握的程度为 20 %,而不能确定是否掌握的程度为 25 %;4 名学生的 4 门课程部分掌握的程度为 70 %,未掌握的程度为 10 %,不能确定是否部分掌握的程度为 20 %. 这与文献[7]利用模糊数学方法得到的评判结果是一致的.

3 结论

本文在集对分析理论的基础上,结合不确定性问题的特点和理论方法,提出了集对逻辑和不确定集对分析理论,并通过实例分析,发现该方法是一种处理不确定性问题的行之有效方法. 该方法是对集对分析理论的补充、延伸和推广,同时也为处理其他不确定性问题提供了新的思路与方法. 由于该方法的研究刚刚起步,相信该方法是一种很有应用前景的多属性多目标决策方法.

参考文献:

[1] 赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州:浙江科学技术出版社,2000:18-126.
[2] 李洪兴. 工程模糊数学方法及应用[M]. 天津:天津科学技术出版社,1993:5-28.
[3] 蔡文,杨春燕,何斌. 可拓逻辑初步[M]. 北京:科学出版社,2003:1-19.
[4] 王万军. 基于集对逻辑的推理[J]. 甘肃联合大学学报:自然科学版,2005,19(3):15-16.
[5] 王万军. 基于同异反 AHP 的综合评价模型研究[J]. 安徽科技工程学院学报:自然科学版,2005,20(3):46-49.
[6] 王万军. 基于同异反区间数排序及其应用 [J]. 洛阳师范学院学报,2007,26(2):26-29.
[7] 徐扬. 模糊模式识别及其应用[M]. 成都:西南交通大学出版社,1999:102-103

The application of set pair logic and uncertain set pair analysis

WANG Wan-jun
(Mathematics and Information College, Gansu Lianhe University, Lanzhou 730000, China)

Abstract:According to the ideas of Set Pair Analysis(SPA) and uncertain characteristics, the methods and some definitions and conceptions of uncertain set pair analysis and set pair logic were given, and the dependent logical operations and properties about set pair logic were discussed in this paper. finally an example was given, it proved that the model not only gets the reasonable result, but also is a correctly and effective method.

Key words:set pair logic; uncertain; set pair analysis(SPA)