第 28 卷第 3 期
2000 年 9 月

浙江工业大学学报
JOURNAL OF ZHEJIANG UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Vol.28 No.3
September 2000

文章编号:1006-4303(2000)03-0190-05

联系数 $a+bi$ 的运算及在网络计划中的应用

黄德才[1],赵克勤[2],陆耀忠[3]
(1.浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032;2.浙江黄金机械厂, 浙江 诸暨 311811;
3.浙江省交通工程建设集团,浙江 杭州 310004)

摘要:定义了 $a+bi$ 型联系数加法、减法、乘法和除法运算,研究相应的运算规则与性质,给出了在网络计划中的应用实例。其研究结果不仅可用于网络计划管理与控制,而且还可以用于其它不确定性系统的分析与控制。

关键词:联系数 $a+bi$;集对分析;网络计划;不确定性
中图分类号:TB114　　**文献标识码**:A

Fundamental operation of arithmetic on connection number $a+bi$ and its application in network planning

HUANG De-cai[1], ZHAO Ke-qin[2], LU Yao-zhong[3]
(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China;
2. Zhejiang Gold Machine Works, Zhuji 311811, China;
3. Zhejiang Provincial Transportation Engineering & Construction Group, Hangzhou 310004, China)

Abstract:This paper gives the definition of fundamental operation of arithmetic on connection number $a+bi$ in Set Pair Analysis (SPA), studies the property of the fundamental operation of arithmetic and presents some illustrative application examples in network planning.

Key words:connection number $a+bi$; SPA; network planning; uncertainty

0 引 言

我们在文献[1,2]中,应用集对分析中 $a+bi$ 型联系数描述、分析了网络计划中工序时间的既确定又不确定性,得到网络中关键路线集合的概念,也就是网络中的关键路线在不确定环境下不是一层不变的,而是在一定条件下与次关键路线,再次关键路线会发生转化的结论。研究网络计划中的关键路线问题,说到底,是为了最大限度地利用有限资源,使实际工程及早产生效益。因此,当从经济角度看待网络计划时,自然会涉及到有关工期变化与施工成本的联系计算问题。由于网络中单位时间的施工成本也可以用联系数 $a+bi$ 表示,由此必然涉及联系数 $a+bi$ 的乘法等一些基本

收稿日期:1999-10-19;修订日期:2000-04-10
基金项目:浙江省自然科学基金(698069);国家 863 计划资助项目(863-511-945-002)
作者简介:黄德才(1958-),男,博士,浙江工业大学信息工程学院副教授。

运算问题,本文专就此开展初步研究。

1 集对分析与联系数 $a+bi$

集对分析(SPA)由赵克勤于 1989 年提出,目前已受到国内学术界的重视[7]。集对分析的核心思想是把不确定性与确定性作为一个确定不确定性系统来进行数学处理和辨证分析,引进既确定又不确定的联系数 $u=a+bi+bj$ 来系统地处理由随机、模糊、不确知和中介等不确定性所导致的综合不确定性问题[4-6]。联系数的意义不仅在于把一个具体的数与这个数所在的范围联系起来,更在于把一个具体的数与它所在范围内的确定性与不确定性联系起来,使得一定范围内的确定性与不确定性的相互联系、渗透、制约与转化在数量上得到客观地反映。本文为研究简明起见,仅研究 $u=a+bi+bj$ 联系数的一种特款形式 $u=a+bi$ 型联系数的加、减、乘、除运算规则。并通过实例说明其在网络计划中的应用。为此,作出如下定义。

定义 1[5] 设 $u=a+bi$,则称 u 为 $a+bi$ 型联系数。其中 a 为任意非负实数,称为确定数,b 为非负实数,称为不确定数,i 是一个不确定量,$i\in[-1,1]$ 且需根据问题的具体情况不确定取值,有时 i 也可仅作为一个不确定量的标记使用。

如不特别说明,本文所说联系数均指 $a+bi$ 型联系数。

2 $a+bi$ 型联系数的基本运算及性质

2.1 $a+bi$ 型联系数的加法

定义 2[5] 设有两个联系数 $u_1=a_1+b_1i$,$u_2=a_2+b_2i$,则它们之和是一个联系数 $u=a+bi$ 记作:$u=u_1+u_2$,其中 $a=(a_1+a_2)$,$b=(b_1+b_2)$。

由定义 2 容易看出,联系数 $a+bi$ 的加法运算满足交换律和结合律。

2.2 $a+bi$ 型联系数的减法

文献[5]关于两个联系数 $u_1=a_1+b_1i$,$u_2=a_2+b_2i$ 的减法定义为 $u_1-u_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$。研究发现这一定义有不足之处。为此我们引入两个联系数 $a+bi$ 的减法运算如下。

定义 3:设有两个联系数 $u_1=a_1+b_1i$,$u_2=a_2+b_2i$,则它们之差是一个联系数 $u=a+bi$ 记作:$u=u_1-u_2$,其中 $a=(a_1-a_2)$,$b=(b_1+b_2)$。

定义 3 表明,两个不确定量之差仍是不确定量,其不确定数是两个不确定数之和。

定理 1:(1) 设联系数 $u=a+bi$,则 $-u$ 是一个联系数且 $-u=-a+bi$

(2) 设联系数 $u=bi$,则 $-u$ 是一联系数且 $-u=bi=u$

(3) 设联系数 $u=a+bi$,则 $u-u=(b+b)i$

(4) 设三个联系数 $u_1=a_1+b_1i$,$u_2=a_2+b_2i$,$u_3=a_3+b_3i$,则

$$u_1-(u_2+u_3)=u_1-u_2-u_3=u_1-u_3-u_2$$

证明 根据定义 3 容易证明定理 1 中结论成立,这里不予赘述。

定理 1 的(3) 说明两个相同的联系数之差不等于零,这也符合客观实际:两个不确定量即使波动范围相同,其差仍是一个不确定量,通常不是一个确定量。

2.3 $a+bi$ 型联系数的乘法

关于联系数的乘法问题,文献[6]定义为

$$u_1u_2=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i+b_1b_2i^2, \tag{1}$$

把 i^2 项称为高阶不确定量。并指出,当仅从确定性与不确定性角度考虑问题时,可认为

$$u_1 u_2 = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2) i。 \tag{2}$$

由于联系数定义为 $u = a + bi$ 的形式，在实际中应用若用(1)式，则两个联系数之积有 i^2，n 个联系数之积有 i^n 等不确定项，给进一步的分析带来困难。因此，(1)式只能作为联系数的乘法定义的一种形式，用于研究不确定性的层次性。当作为一般代数系统的乘法运算时，需要作如下定义。

定义 4 设有两个联系数 $u_1 = a_1 + b_1 i$，$u_2 = a_2 + b_2 i$，则它们之积是一个联系数 $u = a + bi$ 记作：$u = u_1 \times u_2$，其中 $a = a_1 a_2 + b_1 b_2$，$b = a_1 b_2 + a_2 b_1$。

由定义 4 可得如下定理。

定理 2：联系数的乘法有如下性质：

(1) 设联系数 $u_1 = b_1 i$， $u_2 = b_2 i$，则 $u_1 \times u_2 = b_1 b_2 + 0i$

(2) 交换率：设联系数 $u_1 = a_1 + b_1 i$，$u_2 = a_2 + b_2 i$ 则 $u_1 \times u_2 = u_2 \times u_1$

(3) 结合率：设联系数 $u_1 = a_1 + b_1 i$，$u_2 = a_2 + b_2 i$，$u_3 = a_3 + b_3 i$，则 $u_1 \times (u_2 \times u_3) = u_1 \times u_2 \times u_3$

证明 根据定义 4 容易证明定理 2 中(1)，(2)成立。下面证明(3)。

(3) $u_1 \times (u_2 \times u_3) = (a_1 + b_1 i) \times (a_2 a_3 + b_2 b_3 + (a_2 b_3 + b_2 a_3) i)$

$= a_1(a_2 a_3 + b_2 b_3) + b_1(a_2 b_3 + b_2 a_3) + (b_1(a_2 a_3 + b_2 b_3) + a_1(a_2 b_3 + b_2 a_3) i$

$= (a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 b_3 + b_1 a_2 b_3 + b_1 b_2 a_3) + (a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3) i$

同理有 $(u_1 \times u_2) \times u_3 = (a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i) \times (a_3 + b_3 i)$

$= (a_1 a_2 + b_1 b_2) a_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) b_3 + ((a_1 a_2 + b_1 b_2) b_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) a_3) i$

$= (a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 b_3 + b_1 a_2 b_3 + b_1 b_2 a_3) + (a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3) i$，证毕。

定理 2 的结果表明，集对分析联系数意义下的两个不确定量，其乘积一般说来是一个既确定又不确定量。对联系数的加法与乘法有：

定理 3：(分配率) 设联系数 $u_1 = a_1 + b_1 i$，$u_2 = a_2 + b_2 i$，$u_3 = a_3 + b_3 i$，则

$$u_1 \times (u_2 + u_3) = u_1 \times u_2 + u_1 \times u_3$$

证明：$u_1 \times (u_2 + u_3) = (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + a_3 + (b_2 + b_3) i)$

$= a_1(a_2 + a_3) + b_1(b_2 + b_3) + (b_1(a_2 + a_3) + a_1(b_2 + b_3)) i$

$= a_1 a_2 + a_1 a_3 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + (b_1 a_2 + b_1 a_3 + a_1 b_2 + a_1 b_3) i$

而 $u_1 \times u_2 + u_1 \times u_3 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + a_1 a_3 + b_1 b_3 + (b_1 a_3 + a_1 b_3) i$

$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + a_1 a_3 + b_1 b_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 a_3 + a_1 b_3) i$

比较即可知定理成立，证毕。

例 1 设 $u_1 = 7 + 2i$，$u_2 = 6 + 2i$，$u_3 = 5 + i$，因为 $u_1 \times (u_2 - u_3) = (7 + 2i) \times (1 + 3i) = 13 + 23i$，而 $u_1 \times u_2 - u_1 \times u_3 = (46 + 26i) - (37 + 17i) = 9 + 43i$，所以，联系数的乘法对减法不满足分配率。

2.4 $a + bi$ 型联系数的除法

下面，我们定义 $a + bi$ 型联系数的除法运算。其基本思想源于实数的倒数概念。

众所周知，一个实数 a 与其倒数 a^{-1} 的乘积 $aa^{-1} = 1$。因此，对于联系数 $u = a + bi$ 来说，不妨设其倒数 $u^{-1} = a + bi$ 也是一个联系数。若设 $uu^{-1} = 1$，即 $a\underline{a} + b\underline{b} + (a\underline{b} + b\underline{a}) i = 1$，由此可得，$\underline{a} = \frac{a}{a^2 - b^2}$，$\underline{b} = \frac{-b}{a^2 - b^2}$，故由联系数定义，可以引入联系数的倒数和除法概念。

定义 5：(1) 联系数 $u = a + bi$ ，若 $a - b \neq 0$，则 u 的倒数是一个联系数，记作 $u^{-1} = \underline{a} + \underline{b}i$。其

中 $\underline{a}$,$\underline{b}$ 分别定义为,$\underline{a}=\dfrac{a}{a^2-b^2}$,$\underline{b}=\dfrac{b}{|a^2-b^2|}$

(2) 联系数 $u_1=a_1+b_1i$, $u_2=a_2+b_2i$ 的商是一个联系数,定义为 $u_1\times u_2^{-1}$,记作 $u_1\div u_2$,即定义 $u_1\div u_2=u_1\times u_2^{-1}$。

如果想测量系统的一个不确定量,而该量无法直接获得,但知道它是另外两个易于获得的不确定量的商,则可利用联系数的除法获得该不确定量的联系数表达式。

3　应用举例

我们在文献[1]、[2]中建立了一种基于联系数表述的网络计划新方法,所给出的应用实例如图 1 所示。

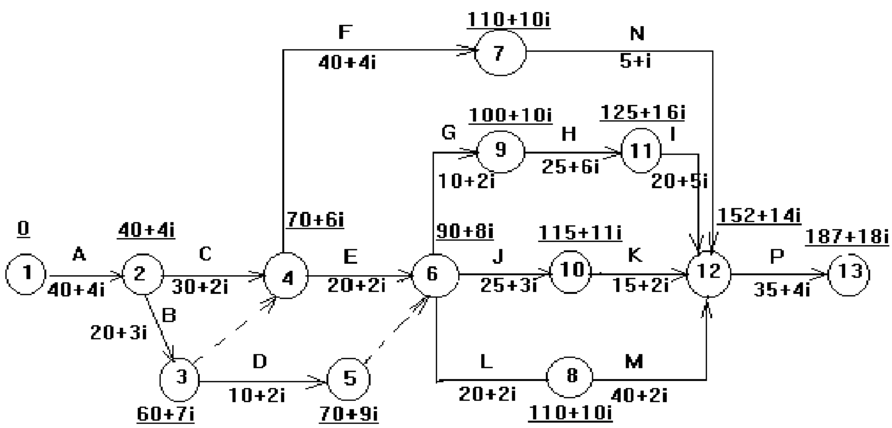

图 1　用联系数表述的某工程网络计划图

文献[2]中已求得工期'最长'的线路有 L_1:①-②-④-⑥-⑧-⑫-⑬和 L_2:①-②-④-⑥-⑨-⑪-⑫-⑬,并指出 L_1 的工期为 $185+16i$,L_2 的工期为 $180+25i$。这里给出 L_1 与 L_2 上各自工期的计算过程。

对 L_1 来说,根据图 1 有:$(40+4i)+(30+2i)+(20+2i)+(20+2i)+(40+2i)+(35+4i)$ 按本文 2.1 中的定义 2 得此线路上的工期联系数 $a+bi$,其中

$$a=40+30+20+20+40+35=185;\qquad bi=4i+2i+2i+2i+2i+4i=16i$$

同理可算得 L_2 上的工期天数为 $180+25i$。

在图 1 所示的网络图中,设工序 A 的单位时间成本为$(9+1i)$万元,按照本文给出的 $a+bi$ 型联系数的乘法定义计算可得$(40+4i)(9+1i)=(360+4)+(40+36)i=364+76i$,即完成 A 所需的成本为 $364+76i$ 万元。

反之,如果已知完成工序 A 所需成本为 $364+76i$ 万元,单位时间成本为$(9+1i)$万元,则利用 $a+bi$ 型联系数的除法定义,由$(364+76i)\div(9+1i)$得出工序 A 的一个工期估计值为$(41.9+13.1i)$,注意到联系数的除法不是其乘法的逆运算,因此$(364+76i)\div(9+1i)\neq(40+4i)$。$(364+76i)\div(9+1i)$为在资金总额和单位时间成本已知情况下,如何控制工期提供了极有价值的信息。

4　结　语

(1)由本文工作可见,联系数 $a+bi$ 是一个良好的数学工具,在此基础上引入相应的运算规则,

不仅可以满足解决实际问题需要,而且丰富发展了有关联系数学的理论。

(2)从工程实际应用角度看,本文给出的有关 $a+bi$ 型联系数的加、减、乘、除运算,其数学含义明确,计算方法简洁,易学易用,便于工程技术人员掌握使用。

(3)当然,$a+bi$ 型联系数是集对分析中 $a+bi+cj$ 型联系数的特款,在一些较为复杂的系统问题分析中,例如,要同时要考虑系统的不确定性与系统的突变与反常,则要应用 $a+bi+cj$ 型联系数[8]。

参考文献:

[1] 黄德才,赵克勤.基于联系数的网络计划与控制方法初探[J].浙江工业大学学报,1998,26(1):17-21.

[2] 黄德才,赵克勤.用联系数描述和处理网络计划中的不确定性[J].系统工程学报,1999,14(2):112-117.

[3] 李若刚,王国祥,李跃.关于网络计划模型中的时间不确定性的讨论[J].系统工程与电子技术,1997,(8):40-45.

[4] 赵克勤,宣爱理.集对论——一种新的不确定性理论方法与应用[J].系统工程,1996,14(1):18-23.

[5] 赵克勤.联系数及其应用[J].吉林师范学院学报,1996,17(8):50-53.

[6] 赵克勤.集对分析(SPA)中的联系数与不确定量[J].大自然探索,1997,16(2):91.

[7] Zhang Linfeng,Zhao Keqin.The theories methods and its applications of set pair analysis[A]. Systems Science and Its Applications[C].Tianjin:Tianjin People's Publishing House,1998.61-64.

[8] 赵克勤,黄德才,陆耀忠.基于 $a+bi+cj$ 型联系数的网络计划方法初探[J].系统工程与电子技术,2000,(2):29-31.

(责任编辑:陈石平)

联系数a+bi的运算及在网络计划中的应用

作者： 黄德才， 赵克勤， 陆耀忠
作者单位：
刊名： 浙江工业大学学报 ISTIC PKU
英文刊名： JOURNAL OF ZHEJIANG UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
年，卷(期)： 2000，28(3)
被引用次数： 9次

引证文献(9条)

1. 汪新凡 基于联系数的区间型多属性决策方法研究[期刊论文]-西安理工大学学报 2007(1)

2. 汪新凡 基于联系数的纯语言多属性群决策方法[期刊论文]-重庆工商大学学报（自然科学版） 2006(6)

3. 杨继荣.董晔弘 材料选择的集对分析方法及应用[期刊论文]-机械设计 2006(11)

4. 杨继荣.蔡悦华 用集对分析论对机构误差的研究与应用[期刊论文]-现代制造工程 2006(7)

5. 杨继荣 尺寸链求解的集对分析方法研究与应用[期刊论文]-机械传动 2006(1)

6. 孟文清.张亚鹏.邹景磊.李朋 考虑影响因素的AHP-联系数网络计划[期刊论文]-河北建筑科技学院学报（自然科学版） 2006(4)

7. 宋向炯 基于联系数的空气比热容比实验不确定度近似算法改进[期刊论文]-大学物理实验 2006(4)

8. 王霞 基于复数理论的同异型联系数及其应用[期刊论文]-数学的实践与认识 2005(8)

9. 章勇武 高速公路建设工程进度的柔性化管理研究[学位论文]博士 2005