基于联系数的直觉模糊数多指标评价研究*

刘秀梅

(连云港师范高等专科学校 数学系 ,江苏 连云港 222006)

[**摘　要**] 集对分析的联系数理论是关于确定性与不确定性的理论 ,直觉模糊数多指标评价问题中具有不确定性 ,为了预测和分析不确定性的影响 ,可以运用集对分析理论 ,将直觉模糊数转化为联系数 ,从而建立基于联系数的直觉模糊数多指标评价模型. 实例应用表明 ,方法有效、实用.

[**关键词**] 直觉模糊数 ;多属性决策 ;不确定性 ;联系数

[**中图分类号**] O1 - 0 ;O22 ;C934　　[**文献标识码**]A　　[**文章编号**] 1009 - 7740(2008) 04 - 0091 - 04

1　引言

直觉模糊集理论在 80 年代被保加利亚学者 K. T. Atanassov 提出后[1] ,逐渐运用于决策领域问题的研究. 国外学者 Chen &Tan 和 Hong &Choi 先后利用得分函数提出了多属性决策方法[2 - 3] ;Atanassov 又研究了属性权重已知 ,且属性值为直觉模糊性的多属性决策问题[4] ,Li 进一步研究了属性权重和属性值均为直觉模糊集的多属性决策[5] . 国内不少学者也给出了许多不同的方法 ,如属性权重采用不完全信息形式 ,属性值用直觉模糊数表示的多属性决策途径[6] ;通过引入直觉模糊正负理想方案的概念 ,给出了属性值和属性权重都是直觉模糊数的多属性决策方法[7] 等等. 但是 ,大部分研究方法都忽略了对直觉模糊多属性决策问题中的不确定性情况的考虑 ,因此 ,决策结果是否可靠、全面会受到质疑.

集对分析是研究事物的同异反关系以及确定不确定系统的理论[8] ,基于集对分析理论中的联系数 ,可以比较全面地考察系统中的确定与不确定因素的变化 ,有效地解决系统中的不确定性的问题 ,国内一些学者已经运用联系数理论提出了很多解决多属性决策问题的途径[9 - 11] ,本文试图将联系数的集对势理论引入到直觉模糊数的多属性决策问题中 ,提出一个基于联系数的直觉模糊数多属性指标决策新途径 ,并进一步对系统中的不确定情况做可能的预测和分析后作出新的决策.

2　直觉模糊集与联系数

2.1　直觉模糊集

定义 1　设 P 是一个非空集合 ,则称 $F = \{\langle x, \mu_F(x), v_F(x)\rangle \mid x \in P\}$ 为 P 上直觉模糊集 ,其中 ,$\mu_F(x)$ 和 $v_F(x)$ 分别为 P 中元素 x 属于 P 的隶属度和非隶属度 ,$\mu_F: P \to [0,1]$,$v_F: P \to [0,1]$ 且满足条件 $0 \le \mu_F(x) + v_F(x) \le 1$, $x \in P$,称数对 $\langle \mu_F, v_F\rangle (x \in P)$ 为直觉模糊数 ,记为 α_F. P 上的直觉模糊集的全体记为 $IFS(P)$. 在投票模型中 ,$\langle \mu_F, v_F\rangle = \langle 0.5, 0.3\rangle$ 可解释为在 10 人中 ,有 5 人赞成 ,3 人反对 ,2 人弃权.

此外 ,称 $\pi_F(x) = 1 - \mu_F(x) - v_F(x)$ 表示 P 中元素 x 属于 P 的犹豫度(或直觉指标) ,且 $0 \le \pi_F(x) \le 1$, $x \in P$.

2.2　联系数及联系数的集对势

2.2.1　联系数的概念及运算

联系数是集对分析理论中的一个概念[8] ,集对是指具有一定关系的两个集合 ,记为 H , H 构成一个系统. 集对分析就是在一个系统中 ,对集合与集合之间的关系进行分析.

联系数的一般形式是

$$U = A + Bi + Cj \tag{1}$$

其中 ,A、B、C 分别表示 H 中两个集合同一性、差异性、对立性的大小 ,分别称为同一关系数(度) 、差异关系数(度) 、对立关系数(度) ,并称 A、Bi、Cj ,为联系数的同部、异部、反部 ,统称为联系分量.

i 为差异量的标记 ,需要时在 $i \in [0,1]$ 内取值 ,代表差异量的变化 ,j 为对立关系数的标记 ,根据集

* [**收稿日期**] 2008 - 07 - 14

[**基金项目**] 江苏省现代教育技术“十一五”规划课题(项目编号 :2008 - R - 6979)

[**作者简介**] 刘秀梅(1963 -) ,女 ,吉林永吉人 ,连云港师范高等专科学校数学系副教授 ,主要从事数学教育研究。

对分析理论,需要时可根据不同的对立类型取值. 在10人投票模型中,5人赞成,3人反对,2人弃权,可用联系数表示为 $u = 5 + 2i + 3j$.

令 $N = A + B + C$,用 N 除(1)式两边,并令 $u = U/N$, $a = A/N$, $b = B/N$, $c = C/N$,则可得

$$u = a + bi + cj \tag{2}$$

此时有 $a + b + c = 1$. 此过程称为对联系数的归一化,称(2)式为联系数的归一化表达式. 如投票模型也可以表示为 $u = 0.5 + 0.2i + 0.3j$.

联系数可以进行加法和数乘的运算.

定义2 设有三元联系数 $u_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j$, $u_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j$, α为实数,则 u_1 与 u_2 的和以及 α与 u_1 的乘积仍为联系数,记为 $u = u_1 + u_2$ 及 $u = \alpha u_1$,且有

$$u = u_1 + u_2 = a + bi + cj \tag{3}$$

其中 $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$.

$$u = \alpha u_1 = \alpha(a_1 + b_1 i + c_1 j) = a + bi + cj \tag{4}$$

其中 $a = \alpha a_1$, $b = \alpha b_1$, $c = \alpha c_1$.

根据集对分析理论,在联系数 $u = a + bi + cj$ 中,可以对异部进行预测分析,即在异部部分 bi 中,i 同时取 a, b, c,则联系分量 b 被分解成 ab, bb, bc 三部分,用 $ab + a$ 替代 a, $bc + c$ 替代 c, bb 替代 b,则可得预测后的联系数 $u = (a + ab) + bbi + (bc + c)j$,简称预测联系数,通过预测联系数,可以对系统进行进一步分析.

2.2.2 联系数的集对势

一般来说,联系数中的同一度、对立度和差异度是不同的,其差别反映了系统在某一方面的趋势.

定义3 在联系数 $u = a + bi + cj$ 中,称$\frac{a}{a + c}$为对立度倾向于同一度的集对势,用 J_{a-c} 表示;称$\frac{c}{a + c}$为同一度倾向于对立度的集对势,用 J_{c-a} 表示. 称$\frac{b}{a + b + c}$为系统倾向于差异度的集对势,用 J_b 表示.

显然,J_{a-c}越大(J_{c-a}越小),表示系统倾向于同一度的趋势越大;J_b 越大,表示系统倾向于差异度的趋势越大,也即不确定性越大.

2.3 直觉模糊数向联系数的转化

根据直觉模糊数的定义,$\mu_F(x)$和 $v_F(x)$分别为 P 中元素 x 属于 P 的隶属度和非隶属度,$\pi_F(x) = 1 - \mu_F(x) - v_F(x)$表示 P 中元素 x 属于 P 的犹豫度,从隶属度、非隶属度、犹豫度的概念上,我们可以看出,隶属度和非隶属度是对事物的肯定性和否定性回答,都是确定的,犹豫度是对事物排除隶属度和非隶属度后的一种刻画,具有不确定性. 基于这种思想,我们将直觉模糊数的隶属度 $\mu_F(x)$与联系数的同一关系数 a 相对应,把直觉模糊数的非隶属度 $v_F(x)$与联系数的对立关系数 c 相对应,把直觉模糊数的犹豫度 $\pi_F(x)$与联系数的差异关系数 b 相对应,就可以把直觉模糊数转换为联系数.

设有直觉模糊数 $\alpha_F = \langle \mu_F(x), v_F(x) \rangle$,令

$$a = \mu_F(x), \tag{5}$$

$$c = v_F(x), \tag{6}$$

$$b = \pi_F(x) = 1 - \mu_F(x) - v_F(x) \tag{7}$$

即可将直觉模糊数转化为联系数

$$\alpha_F = a + bi + cj \tag{8}$$

从式(8)看到,联系数全面、系统地反映了不确定性(犹豫度)的存在,因此,运用直觉模糊数转换后的联系数进行决策具有可行性.

3 直觉模糊多指标评价问题

3.1 问题阐述

设共有 m 个方案 $S_1, S_2, \cdots S_m$,每个方案各有 n 个相同的考核指标 $Q_1, Q_2, \cdots Q_n$,每个方案 S_t 的指标值用直觉模糊数表示 $\alpha_{tk} = \langle \mu_{tk}, v_{tk} \rangle$,其中 $\mu_{tk}, v_{tk} \in [0,1]$, $t = 1,2,\cdots m$, $k = 1,2,\cdots n$,已知各指标权重值为 w_1、$w_2 \cdots w_n$,且 $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$, $w_k \in (0,1)$. 为简单起见,规定各属性值已通过规范化处理为无量纲的 α_{tk}. 要求在上述方案中确定出最优方案,并作出优劣排序.

3.2 评价过程

第1步,依据前述方法,将各指标值的直觉模糊数 α_{tk}改写成联系数 r_{tk},

$$r_{tk} = a_{tk} + b_{tk} i + c_{tk} j \tag{9}$$

其中 $a_{tk} = \mu_{tk}$, $c_{tk} = v_{tk}$, $b_{tk} = 1 - \mu_{tk} - v_{tk}$.

第2步,将由(9)式得到的联系数按照预测联系数的分解方法进一步改写为预测联系数 r_{tk}',

$$r_{tk}' = (a_{tk} + a_{tk} b_{tk}) + b_{tk} b_{tk} i + (b_{tk} c_{tk} + c_{tk}) j \tag{10}$$

第3步,建立综合评价模型

$$M(S_t) = \sum_{k=1}^{n} w_k r_{tk} \tag{11}$$

$$M(S_t)' = \sum_{k=1}^{n} w_k r_{tk}' \tag{12}$$

计算各方案的综合评价值 $M(S_t)$和 $M(S_t)'$.

第4步,分别计算各方案综合评价值倾向于同一度的集对势 J_{a-c},依据 J_{a-c}的大小对方案进行综

合排序,取值大的方案优于取值小的方案.

4　实例应用

为便于比较和分析,说明新方法的有效性采用文献[12]和[13]的实例.

例 1[12]假定有 3 个候选方案 S_1,S_2,S_3 和 3 个评价指标 Q_1,Q_2,Q_3.为简单起见,每个备选方案为已处理成无量纲的评价指标,且都是效益型指标,每个候选方案对评价指标的满足程度用直觉模糊集表示,如表 1 所示.

表 1　各方案的直觉模糊数表

	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	$\langle 0.5,0.3\rangle$	$\langle 0.2,0.6\rangle$	$\langle 0.3,0.5\rangle$
S_2	$\langle 0.4,0.4\rangle$	$\langle 0.3,0.3\rangle$	$\langle 0.9,0.0\rangle$
S_3	$\langle 0.4,0.2\rangle$	$\langle 0.5,0.2\rangle$	$\langle 0.8,0.2\rangle$

各项指标权重信息为 $w_1=0.5$,$w_2=0.3$,$w_3=0.2$.试对可供选择的 3 种方案作出优劣排序.

第 1 步,把模糊指标值改为联系数表示,得表 2.

表 2　用联系数表示的模糊数评价表

	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	$0.5+0.2i+0.3j$	$0.2+0.2i+0.6j$	$0.3+0.2i+0.5j$
S_2	$0.4+0.2i+0.4j$	$0.3+0.4i+0.3j$	$0.9+0.1i+0.0j$
S_3	$0.4+0.4i+0.2j$	$0.5+0.3i+0.2j$	$0.8+0.0i+0.2j$

第 2 步,把表 2 的联系数改写成预测联系数,见表 3.

表 3　用预测联系数表示的模糊数评价表

	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	$0.60+0.04i+0.36j$	$0.24+0.04i+0.72j$	$0.36+0.04i+0.60j$
S_2	$0.48+0.04i+0.48j$	$0.42+0.16i+0.42j$	$0.99+0.01i+0.00j$
S_3	$0.56+0.16i+0.28j$	$0.65+0.09i+0.26j$	$0.80+0.0i+0.20j$

第 3 步,根据综合评价模型,计算 $M(S_t)$ 及 $M(S_t)'$.

$$M(S_1)=\sum_{k=1}^{n}w_kr_{1k}=0.5(0.5+0.2i+0.3j)+0.3(0.2+0.2i+0.6j)+0.2(0.3+0.2i+0.5j)$$
$$=0.37+0.2i+0.43j$$

$$M(S_2)=\sum_{k=1}^{n}w_kr_{2k}=0.47+0.24i+0.29j$$

$$M(S_3)=\sum_{k=1}^{n}w_kr_{3k}=0.51+0.29i+0.2j$$

$$M(S_1)'=\sum_{k=1}^{n}w_kr_{1k}'=0.444+0.04i+0.516j$$

$$M(S_2)'=\sum_{k=1}^{n}w_kr_{2k}'=0.564+0.07i+0.366j$$

$$M(S_3)'=\sum_{k=1}^{n}w_kr_{3k}'=0.635+0.107i+0.258j$$

第 4 步,计算综合评价值联系数以及预测联系数的集对势,以确定排序,见表 4 和表 5.

表 4　各方案联系数的集对势及排序

	$M(S_t)$	集对势 J_{a-c} 及排序	
S_1	$0.37+0.2i+0.43j$	0.4625	③
S_2	$0.47+0.24i+0.29j$	0.6184	②
S_3	$0.51+0.29i+0.2j$	0.7183	①

表 5　各方案的预测联系数的集对势及排序

	$M(S_t)'$	集对势 J_{a-c} 及排序	
S_1	$0.444+0.04i+0.516j$	0.4625	③
S_2	$0.564+0.07i+0.366j$	0.6065	②
S_3	$0.635+0.107i+0.258j$	0.7111	①

从表 4 可以看出,方案的排序为 $S_3\succ S_2\succ S_1$($\succ$表示优于),若进一步考虑不确定因素的倾向,由表 5 得到的预测排序也是一样的,S_3 为最优方案,此结果与文献[12]结论一致.

例 2[13]教师教学评价问题.假设对 3 位教师 S_1,S_2,S_3 的教学 Q_1、科研 Q_2 和管理 Q_3 工作进行评价.用统计方法得到每位教师 S_t 的评价指标 Q_k 的满意程度值 μ_{tk}和不满意程度值 v_{tk},$t=1,2,3$,$k=1,2,3$,记直觉模糊数 $\alpha_{tk}=\langle\mu_{tk},v_{tk}\rangle$,各评价指标的权重也为直觉模糊数表示,具体见表 6.

表 6　各方案的直觉模糊数表

	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	$\langle 0.75,0.1\rangle$	$\langle 0.6,0.25\rangle$	$\langle 0.8,0.2\rangle$
S_2	$\langle 0.8,0.15\rangle$	$\langle 0.68,0.2\rangle$	$\langle 0.45,0.5\rangle$
S_3	$\langle 0.4,0.45\rangle$	$\langle 0.75,0.05\rangle$	$\langle 0.6,0.3\rangle$
权重	$\langle 0.25,0.25\rangle$	$\langle 0.35,0.4\rangle$	$\langle 0.3,0.65\rangle$

试对可供选择的 3 种方案作出优劣排序.

这里,依据文献[13]可运用线性规划方法求得指标的权重为 $w_1=0.25$,$w_2=0.45$,$w_3=0.3$.

第 1 步,把用模糊数表示的指标值改为联系数,得表 7.

表 7　用联系数表示的模糊数评价表

	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	$0.75+0.15i+0.1j$	$0.6+0.15i+0.25j$	$0.8+0.0i+0.2j$
S_2	$0.8+0.05i+0.15j$	$0.68+0.12i+0.2j$	$0.45+0.05i+0.5j$
S_3	$0.4+0.15i+0.45j$	$0.75+0.2i+0.05j$	$0.6+0.1i+0.3j$

第 2 步,把表 7 的联系数改写成预测联系数,见表 8.

表 8 用预测联系数表示的模糊数评价表

	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	$0.8625+0.0225i+0.115j$	$0.69+0.0225i+0.2875j$	$0.8+0.0i+0.2j$
S_2	$0.84+0.0025i+0.1575j$	$0.7616+0.0144i+0.224j$	$0.4725+0.0025i+0.525j$
S_3	$0.46+0.0225i+0.5175j$	$0.9+0.04i+0.06j$	$0.66+0.01i+0.33j$

第 3 步 根据综合评价模型,计算 $M(S_t)$ 及 $M(S_t)'$,见表 9 和表 10.

第 4 步,计算综合评价值联系数以及预测联系数的集对势,以确定排序,见表 9 和表 10.

表 9 各方案的综合评价值联系数的集对势及排序

	$M(S_t)$	集对势 J_{a-c}	及排序
S_1	$0.7035+0.105i+0.1975j$	0.7808	①
S_2	$0.641+0.0815i+0.2775j$	0.6979	③
S_3	$0.6175+0.1575j+0.225j$	0.7329	②

表 10 各方案的综合评价值预测联系数的集对势及排序

	$M(S_t)'$	集对势 J_{a-c}	及排序
S_1	$0.7761+0.0158i+0.2181j$	0.7806	①
S_2	$0.6945+0.0079i+0.2977j$	0.7000	③
S_3	$0.7180+0.0266j+0.2554j$	0.7376	②

从表 9 和表 10 可以看出,方案的综合排序及预测排序都为 $S_1 \succ S_3 \succ S_2$,即 S_1 最优,这与文献[13]结果一致.

5 结语

以上两例充分说明,直觉模糊数的多指标评价问题可利用集对分析联系数理论来解决,用联系数的集对势排序可以得到与利用得分函数评价的一致性结果,而且利用集对分析理论,可以充分考虑不确定性的影响,对系统的不确定性进行预测和分析.所以,集对分析的联系数理论对多指标评价问题有较好的应用前景,其它相关问题有待于进一步研究和深入.

[参考文献]

[1] Atanassov KT. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1986,20(1).

[2] Chen S M, Tan JM. Handling multicriteria fuzzy decision - making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems,1994,67(2).

[3] Hong D H, Choi CH. Multicriteria fuzzy decision - making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000,114(1).

[4] Atanassov K, Pasi G, Yager R R. Intuitionistic fuzzy interpretations of multi - criteria multi - person and multi - measurement tool decision making[J]. International Journal of Systems Science,2005,36(14/15).

[5] Li D F. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences,2005,70(1).

[6] 徐泽水. 直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径[J]. 系统工程理论与实践,2007,27(11).

[7] 南江霞,李登峰,张茂军. 直觉模糊多属性决策的 TOPSIS 法[J]. 运筹与管理,2008,(3).

[8] 赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州:浙江科技出版社,2000,3.

[9] 张斌. 不确定性信息处理的集对论思想与方法[J]. 模糊系统与数学,2001,15(2).

[10] 汪新凡,杨小娟. 基于联系数贴近度的区间数多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识,2008,38(3).

[11] 叶跃祥,糜仲春,王宏宇,梁晓艳. 一种基于集对分析的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术,2006,28(9).

[12] 谭春桥,张强. 模糊多属性决策的直觉模糊集方法[J]. 模糊系统与数学,2006,20(5).

[13] 林琳,袁学海等. 基于直觉模糊集的多准则决策问题[J]. 数学的实践与认识,2007,37(5).

Multi - Attribute Decision Making Method Based on Intuitionistic Fuzzy Numbers and Connection Numbers

LIU Xiu - mei

(Department of Mathematics,Lianyungang Teachers College,Lianyungng 222006,China)

Abstract:The set pair analysis and connection mathematics theory is a theory about certainty and uncertainty. The multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy conditions is of uncertainty. To give a fairly accurate forecast of uncertainty and analyse the effect of uncertainty, a new multiple at tribute decision making method based on intuitionistic fuzzy sets and connection mumbers is proposed by transforming intuitionistic fuzzy numbers into connection numbers. The example shows that the method is valid and practical.

Key words:intuitionistic fuzzy number;multiple attribute decision making;uncertainty;certainty;connection number