第40卷第1期 数学的实践与认识 Vol. 40 No. 1
2010年1月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan., 2010

基于集对分析联系数的信息不完全直觉模糊多属性决策

刘秀梅[1], 赵克勤[2]

(1. 连云港师范高等专科学校 数学系, 江苏 连云港 222006)
(2. 浙江诸暨联系 数学研究所, 浙江 诸暨 311811)

摘要: 信息不完全直觉模糊多属性决策是一类不确定性决策问题, 其不确定性来自属性权重信息不完全和属性值的直觉模糊数表示. 为了系统地刻画直觉模糊多属性决策中的不确定性, 避免直觉模糊多属性决策中利用得分函数做决策的片面性和不准确性, 可以将信息不完全的权重和直觉模糊数表示的属性值转化成集对分析理论中的联系数, 并建立信息不完全直觉模糊多属性决策模型, 通过对不确定性进行分析后作出决策. 实例应用表明该决策方法具有合理性和可行性.

关键词: 信息不完全; 直觉模糊数; 多属性决策; 不确定性; 联系数; 集对分析

1 引 言

由美国学者Zadeh在上世纪60年代开创的模糊集理论(Fuzzy set theory)为处理模糊不确定现象掀开了崭新的一页[1], 但人们很快发现, 仅利用一个取值于闭区间[0, 1]的隶属度刻画模糊不确定性还显得不够, 为此, 保加利亚学者K. T. Atanassov拓展了Zadeh的工作, 把仅考虑隶属度的Zadeh模糊集推广到同时考虑隶属度、非隶属度和犹豫度三方面信息的情况, 提出直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy set)的概念[2], 由于直觉模糊集比Zadeh模糊集更具体地刻画研究对象的模糊性, 因而受到学者们的关注和重视, 并取得了不少成果[3-4]. 一些学者把直觉模糊集理论用于决策领域, 其中Chen & Tan[5]利用得分函数去处理基于Vague集的模糊多属性决策问题, 而Rustince&Burillo则指出Vague set实质上就是直觉模糊集[6], Hong & Choi对文献[5]的方法作了改进, 给出了精确函数的概念, 进而利用得分函数和精确函数提出了一种基于Vague set的模糊集多属性决策方法[7], Atanassov研究了属性权重已知, 且属性值为直觉模糊性的多属性决策问题[8], Li进一步研究了属性权重和属性值均为直觉模糊集的多属性决策, 给出了一种基于线性规划的决策途径[9]. 在国内, 徐泽水给出了属性权重采用不完全信息形式, 属性值用直觉模糊数表示的多属性决策途径[10], 其基本思路是利用线性规划求得属性权重, 再对属性值合成进行加权, 得出决策结果; 南江霞[11]等人通过引入直觉模糊正负理想方案的概念, 给出了属性值和属性权重都是直觉模糊数的多属性决策方法; 胡辉等给出了基于TOPSIS的区间直觉模糊多属性决策方法[12]和不同直觉偏好结构的多属性决策方法[13], 等等. 上述工作, 虽然为处理直觉模糊多属性决策提供了不少可操作的方法, 但有一个共同的不足是, 忽略了直觉模糊多属性决策在本质上是一个含有不确定性的决策问题. 当属性权重不完全且属性值是直觉模糊数的时候, 其中的“不完全”、“犹豫度”都具有不确定性, 而且这种不确定性关键性地影响着方案的排序, 所以直觉

收稿日期: 2009-01-26
基金项目: 连云港师范高等专科学校校级基金课题

模糊多属性决策结果的一般形式应当是"if than"的形式, 也就是应当给出在不确定性处于何种状态时的决策, 而不是一个完全确定的无条件的唯一的决策结果 遗憾的是, 从文献[2]到文献[13]都是在避开不确定性具体分析的条件下得到唯一确定的结果, 这样的结果, 很难满足实际决策的需要

事实上, 由本文作者之一于 1989 年提出的集对分析(Set Pair Analysis, 简记 SPA) 理论[14], 不仅仅从理论上承认客观事物的模糊不确定性的存在, 还给出了一个刻画研究对象模糊不确定性以及模糊不确定性与确定性相互联系、相互作用的数学工具—同异反联系数[15], 本文简称其联系数 特别是集对分析理论中的联系数引入了不确定数 i, 使得我们可以对 i 所承载的不确定性展开具体分析和讨论, 也因此使得集对分析得到了广泛的应用[16-22], 我们知道, 直觉模糊集的提出到现在并没有一个与之相对应的代数表达式, 而集对分析从 1989 年一开始提出时, 就给出了充分表达研究对象相对于给定参考集的同一程度、对立程度以及不确定程度上述 3 度相互联系的代数表达式 把联系数与直觉模糊集概念相对照, 联系数的同部对应着直觉模糊数的隶属度, 其反部对应着直觉模糊数的非隶属度, 其异部对应着直觉模糊数的"犹豫度", 因而可以建立基于集对分析联系数的直觉模糊多属性决策模型, 再依据对联系数中不确定数 i 的分析, 使得直觉模糊多属性决策问题中的不确定性分析有了着眼点和可操作性

本文的工作, 主要是利用集对分析联系数在刻画研究对象不确定性信息时的相对完整性、系统性和辨证性[18], 把其应用到属性权重信息不完全, 属性值用直觉模糊数表示的多属性决策问题中, 给出了求解此类问题的一种新的比较简洁的途径, 并把其用于一个实例的计算, 以说明这一新途径的合理性和可行性

2 集对分析与联系数

2 1 集对分析的概念

所谓集对, 就是具有一定联系的两个集合所组成的一个基本单位 如决策对象与决策方法, 属性权重与属性值的确定性与不确定性, 属性值与最优属性值, 接受与不接受, 满意与不满意等等, 都可以看成是集对的例子.

一般地, 若所论两个集合为 E、F, 记集对为 H, 则 $H = (E, F)$ 表示具有集对关系的两个集合. 分析集对中两个集合的同(同一性) 关系、异(差异性) 关系、反(对立性) 关系及其相互联系与转化, 是集对分析的基本思想

2 2 集对分析的联系数理论

2 2 1 联系数的概念

在一定的问题背景 W 下, 对集对 H 中的两个集合的集对关系展开分析, 再对分析得出的同、异、反关系, 进行分类统计, 建立起两个集合的一个同异反联系数, 记为 U 或 $U(H)$, 有

$$U = U(H) = A + Bi + Cj \tag{1}$$

称 U 或 $U(H)$ 为同异反联系数, 简称联系数

在(1) 式中, $A, B, C \in R^+$ (正实数), A、B、C 分别表示 H 中两个集合同一性、差异性、对立性的大小, 分别称为同关系数(度)、异关系数(度)、反关系数(度), 并称 A、Bi、Cj, 为联系数的同部、异部、反部, 统称为联系分量

i 为差异度的标记, 需要时在 $i \in [j, 1]$ 内取值, j 为对立型关系数的标记, 需根据不同的

对立类型取值. 当同异反关系是正负型对立型关系时, 取 $j=-1$, 这时 $i\in[-1,1]$; 当同异反关系是倒数型对立关系时, $j=\frac{1}{R}$, R 为同关系数中的最小数, 此时, $i\in\left[\frac{1}{R},1\right]$.

令 $N=A+B+C$, 称 N 为联系范数, 表示论域的大小, 用 N 除(1)式两边, 并令 $u=U/N$, $a=A/N$, $b=B/N$, $c=C/N$, 则可得

$$u=u(H)=a+bi+cj \tag{2}$$

此时有 $a+b+c=1$. 在无某些联系分量的情况下, 由(2)式可得到以下形式的联系数:

$$U=U(H)=A+Bi,u=u(H)=a+bi \tag{3}$$

$$U=U(H)=A+Cj,u=u(H)=a+cj \tag{4}$$

$$U=U(H)=Bi+Cj,u=u(H)=bi+cj \tag{5}$$

(3)、(4)、(5)式也分别称为同异型联系数、同反型联系数和异反型联系数, 它们可以分别看成是反部、异部和同部等于零时的特例, 因这时的联系数只有两个分量, 所以也称为二元联系数, 与此同时也称(1)、(2)式为三元联系数.

2.2.2　联系数的运算

1) 加法运算

定义1　设有联系数 $u_1=a_1+b_1i+c_1j$, $u_2=a_2+b_2i+c_2j$, 则 u_1 与 u_2 的和仍为联系数, 记为 $u=u_1+u_2$, 且有

$$u=u_1+u_2=a+bi+cj$$

其中 $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$, $c=c_1+c_2$.

易知, 联系数的加法满足交换律、结合律. 即有

$$u_1+u_2=u_2+u_1$$

$$(u_1+u_2)+u_3=u_1+(u_2+u_3)$$

2) 乘法运算

定义2　设有联系数 $u_1=a_1+b_1i+c_1j$, $u_2=a_2+b_2i+c_2j$, 则 u_1 与 u_2 的乘积为 u_1u_2, 记为 $u=u_1u_2$, 且有

$$\begin{aligned}u=u_1u_2&=(a_1+b_1i+c_1j)(a_2+b_2i+c_2j)\\&=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i+(a_1c_2+a_2c_1)j+b_1b_2i^2+(b_1c_2+b_2c_1)ij+c_1c_2j^2\end{aligned}$$

从以上定义可以看出, 联系数的乘法运算按照多项式运算规则进行运算, 得到的结果是一个多元联系数.

两个联系数的乘积也是关于 i 和 j 的函数, 有时根据问题背景的需要对联系数进行取值运算, 如, 计算联系数 $u=0.5+0.1i+0.4j$ 在 $i=0.5$ 及 $j=-1$ 处的值, 有

$$u=u(i,j)\Big|_{\substack{i=0.5\\j=-1}}=0.5+0.1\times0.5+0.4\times(-1)=0.15$$

3) 大小比较

定义3　设有联系数 $u_1=a_1+b_1i+c_1j$, $u_2=a_2+b_2i+c_2j$, 当且仅当 $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,i,j$ 都有确定的值时, 可以比较 u_1 与 u_2 的大小.

例如有联系数

$$u_1=a_1+b_1i+c_1j=0.5+0.1i+0.4j$$

$$u_2=a_2+b_2i+c_2j=0.6+0.1i+0.3j$$

当 $i=0.5$, $j=-1$ 时, 有 $u_1=0.15$, $u_2=0.35$, 则 $u_2>u_1$.

2.2.3 模糊隶属度的联系数化

在联系数 $u = a + bi$ 中, 若满足 $a + b = 1$, 则可以用于模糊隶属度的联系数化. 具体是: 把 Zadeh 关于 x 属于给定集合 P 的模糊隶属度 $\mu_x(P) \in [0, 1]$ 通过与该隶属度的补数 $1 - \mu_x(P)$ 的联系后改写成联系数:

当 $1 - \mu_x(P)$ 是对 $\mu_x(P)$ 的否定时, 把 $\mu_x(P)$ 改写成

$$\mu_x(P)' = \mu_x(P) + [1 - \mu_x(P)]j \tag{6}$$

当不能确定 $1 - \mu_x(P)$ 是否是对 $\mu_x(P)$ 的否定时, 把 $\mu_x(P)$ 改写成

$$\mu_x(P)' = \mu_x(P) + [1 - \mu_x(P)]i \tag{7}$$

类似地, 如果仅给出一个元素 x 是否属于集合 P 的不确定程度为 $\mu_x(P) = b, b \in [0, 1]$, 则当 $1 - b$ 是确定 x 属于 P 时, 改写成

$$\mu_x(P) = a + bi \quad a + b = 1 \tag{8}$$

当 $1 - b$ 是确定 x 不属于 P 时, 改写成

$$\mu_x(P) = bi + cj \quad b + c = 1 \tag{9}$$

容易看出, (6)、(7) 两式还可以进一步分别改写成异部为零和反部为零的联系数, 即

$$\mu_x(P)' = \mu_x(P) + 0i + [1 - \mu_x(P)]j \tag{10}$$

$$\mu_x(P)' = \mu_x(P) + [1 - \mu_x(P)]i + 0j \tag{11}$$

同理, (8)、(9) 两式也可以做类似改写, 以完整地表示出 $\mu_x(P)$ 所附带的信息.

2.3 集对分析的同异反不确定性系统理论

根据集对分析, 以上用数学语言叙述了一个内容丰富的同异反不确定性系统理论[19], 结合本文主题, 仅给出以下要点:

1) 联系数是一个不确定性系统. 同一个研究对象相对于给定参考集的确定性与不确定性构成一个不确定系统, 其中的 j 可以根据不同的对立类型取不同的值;

2) 在联系数这个不确定性系统中, 确定性与不确定性相互联系、相互影响、相互制约, 只有在忽略不计不确定的情况下, 才能把一个不确定性系统作为确定性系统处理, 并由此得出"确定"的结果. 例如, 无论是在 $u = a + bi + cj$ 中, 还是在 $u = a + bi$ 或 $u = bi + cj$ 中, 只有不计 $B\ i(bi)$ 这一不确定部分, 才能根据 $A\ (a)$ 和 $C\ (c)$ 的大小展开分析和作出结论. 但是, 由于这种分析是在忽略了不确定性情况下进行的, 所以得到的结果仍具有一定程度的不确定性、不完整性和不可靠性, 这一点常被人们忽视, 由此, 将导致理论计算结果与实际情况脱节.

例如, 在投票决策中, 根据得赞成票的多少就决定方案的取舍就会有不确定性, 因为不投赞成票的不全是反对票. 假设在人民代表的选举中, 得半数以上(含半数) 赞成票能当选. 现设有甲乙两名候选人, 甲得50% 的赞成票, 10% 的弃权票, 40% 的反对票; 乙得49% 的赞成票, 30% 的反对票, 21% 的弃权票, 按假设规则, 甲当选, 乙不当选, 看上去这是一个合理且可靠的结论, 但这个结论是在忽略了不计不赞成票这个"局部参数"的前提下作出的, 事实上, 从另一个"局部参数"反对票的角度看, 乙的反对票比例30% 明显小于甲的反对票比例40%, 这里有一个不容忽略的差数 10%, 因此, 为了客观地反映出伴随着确定的不确定性, 有必要全面系统地对这个投票问题进行不确定性分析, 从而得出谁更优的结论.

这个问题的联系数表示为

$$u_{甲} = 0.50 + 0.10i + 0.40j$$

$$u_{乙} = 0.49 + 0.21i + 0.30j$$

其对应的同反比(同关系数与反关系数之比)分别为

$$(a/c)_{甲} = 0.50/0.40 = 1.25$$

$$(a/c)_{乙} = 0.49/0.30 = 1.63$$

很明显, 把赞成票数与反对票数综合起来看时, 由于 1.63 > 1.25, 所以乙比甲更有当选理由; 显然, 这样的比较比单一地用一个"局部参数"—赞成票的多少来决定谁当选更全面、更合理. 但此时, 我们还应注意到, 弃权票这个不确定性因素所起的作用, 弃权是位于赞成和反对两者之间的过渡, 有倾向于赞成的因素, 也有倾向于反对的因素, 因此, 有必要对弃权票进行具体的分析和分解, 分解出具有赞成倾向的比例、具有反对因素的比例以及具有保持中立倾向的比例, 这样才能全面地、系统地作出谁更优的结论.

3) 模糊不确定性与倒数型对立关系密切. 在联系数 $u = a + bi + cj$ 中, j 的赋值决定了 i 的取值范围, 根据集对分析关于对立概念的分类理论[20], j 可以根据不同问题背景中不同的"对立"含义定义不同的值, 因而与 i 配对后构成对不同不确定性的描述. 当同部与反部是"倒数型"对立时, 同部与反部关系具有"$K \times \frac{1}{K^n}$"($n = 1, 2, \cdots, \infty$) 的特征, 如数学中的正弦与余割, 物理中的周期与频率, 生活中的大小、强弱等, 其中的 K 为同关系数(度)中的最小数. 此时在联系数中的 j 取 $\frac{1}{K^n}$, i 在 $\left[\frac{1}{K^n}, 1\right]$ 内取值; 当 $n = 1$ 时, 联系数刻画的是一阶模糊不确定性, 当 $n = 2$ 时, 联系数刻画的是二阶模糊不确定性, 依次类推, 当 $n \to \infty$ 时, 联系数刻画的是无穷大阶模糊不确定性, 又因 $n \to \infty$ 时, $\frac{1}{K^n} \to 0$, 所以在用联系数刻划模糊不确定性时, j 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{K}\right]$. 例如, 设 10 分表示满意, 则 $\left[\frac{1}{10}, 10\right]$ 是包含"很满意""比较满意""不太满意"等模糊不确定性的一阶模糊区间; $\left[\frac{1}{100}, 10\right]$ 则是进一步包含了"很不满意"等模糊不确定性的二阶模糊区间; 依次类推, $[0, 10]$ 是包含了"非常不满意"、"完全不满意"等模糊不确定性的无穷大阶模糊区间.

3　不完全直觉模糊多属性决策问题

3.1　直觉模糊集

3.1.1　基本概念

定义 3　设 P 是一个非空集合, 则称 $F = \{\langle x, \mu_F(x), \nu_F(x)\rangle \mid x \in P\}$ 为直觉模糊集, 其中, $\mu_F(x)$ 和 $\nu_F(x)$ 分别为 P 中元素 x 属于 P 的隶属度和非隶属度, $\mu_F: P \to [0, 1]$, $\nu_F: P \to [0, 1]$, 且满足条件 $0 \leq \mu_F(x) + \nu_F(x) \leq 1, x \in P$.

此外, 称 $\pi_F(x) = 1 - \mu_F(x) - \nu_F(x)$ 表示 P 中元素 x 属于 P 的犹豫度. Szmidt & Kacprzyk 称 $\pi_F(x)$ 为 P 中元素 x 属于 P 的直觉指标, 且 $0 \leq \pi_F(x) \leq 1, x \in P$. 特别地, 若 $\pi_F(x) = 0$, 则 F 退化为传统的模糊集.

根据上述定义可知, 直觉模糊集的基本组成部分是由 P 中元素 x 属于 P 的隶属度和非隶属度所组成的有序对, 文献[10]称之为直觉模糊数, 这里把直觉模糊数的一般形式简记为 $\alpha = \langle \mu_\alpha, \nu_\alpha \rangle$, 其中 $0 \leq \mu_\alpha + \nu_\alpha \leq 1$.

3.1.2 得分函数及不足

由3.1.1可见,无论是直觉模糊集还是直觉模糊数,都不便于计算,为了实际应用上的需要,Chen & Tan 于1994年给出了直觉模糊集得分函数的概念[5].设直觉模糊数α的得分值为$S(\alpha)$,则$S(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha$,其中$S(\alpha)\in[-1,1]$,显然,$\mu_\alpha$与$\nu_\alpha$之间的差值越大,则直觉模糊数α的得分值越高,也即α越大.因此,得分值$S(\alpha)$可作为衡量直觉模糊数α大小的一个重要指标[2,5].

事实上,根据前述集对分析理论,$S(\alpha)$仅仅是衡量μ_α与ν_α大小关系的一个局部参数,仅仅根据这个局部参数来比较两个直觉模糊集的大小,并进一步做出用直觉模糊数表示的直觉模糊多属性决策结果,是不可靠的,有时甚至是错误的.

例如,按照直觉模糊集的定义,在前面的投票决策中,甲乙的投票结果可分别记成$\mu_1=\langle 0.50,0.40\rangle$和$\mu_2=\langle 0.49,0.30\rangle$,相应的得分函数分别为$S_1(\alpha)=0.50-0.40=0.10$,$S_2(\alpha)=0.49-0.30=0.19$,从得分值看,乙优于甲,但是如果进一步考虑到各自的犹豫度,经分析后,如果甲的犹豫度0.1中有0.08是倾向于赞成票的,乙的犹豫度0.21中有0.11是倾向于反对票的,此时,甲乙各自的直觉模糊集和得分函数分别为$\mu_1=\langle 0.58,0.40\rangle$和$S_1(\alpha)=0.58-0.40=0.18$以及$\mu_2=\langle 0.49,0.41\rangle$和$S_2(\alpha)=0.49-0.41=0.08$,显然,这时甲优于乙.

有时候,即使不考虑犹豫度中的倾向性,仅凭两个直觉模糊集的得分函数大小也会得出难以接受的决策结果.例如,设甲的赞成票率为0.30,反对票率为0.10,弃权票率为0.60,乙的赞成票率为0.55,反对票率为0.40,弃权票率为0.05,按直觉模糊集有$\mu_1=\langle 0.30,0.10\rangle$,$S_1(\alpha)=0.30-0.10=0.20$和$\mu_2=\langle 0.55,0.40\rangle$,$S_2(\alpha)=0.55-0.40=0.15$,从而,按得分多少,得甲优于乙.但事实上,乙似乎更优于甲,因为乙获得超半数的赞成票,而甲的赞成票明显不足半数,说明仅根据得分函数作出决策不可靠.

3.2 化直觉模糊数为联系数

众所周知,集合论是现代数学的基础,集合是集合论中最基本的概念,在构造一个集合时,为了避免发生集合论悖论,严格要求一个集合中的元素要么属于这个集合,要么不属于这个集合,否则难以开展进一步的工作.

但是另一方面,对同一个事物同时作肯定、否定、以及肯定与否定都不确定的现象又客观存在,如候选人的选举结果中包括赞成、反对和弃权;如何引用集合的概念客观地表述这种复杂的系统,集对分析和联系数是一个较好的工具.这是因为,在这个问题中,首先,可以设置一个相对于候选人来说得全部赞成票的理想集(Ideal Set),简记I,而实际投票构成一个实际集(Practical Set),简记P,于是,理想集与实际集构成集对$H=(I,P)$.实际得赞成票就是集对的同,实际得反对票就是集对的反,实际得弃权票就是集对的异,在此基础上,对同异反作分类统计,构造同集、异集和反集,赞成票数、弃权票数和反对票数就是各集的基数,再用“代数和”的形式,形成联系数.见图1.

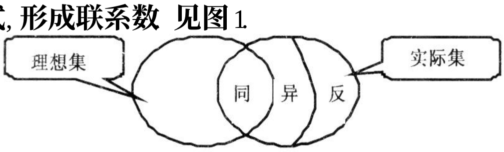

图1 理想集与实际集

遵循这种思想, 考虑到直觉模糊数中的隶属度和非隶属度的对立性特点, 我们将直觉模糊数的隶属度与联系数的同部相对应, 把直觉模糊数的非隶属度与联系数的反部相对应, 把直觉模糊数的犹豫度与联系数的异部相对应, 就可以把直觉模糊数表示为联系数

设有直觉模糊数 $\alpha = \langle \mu_\alpha, \nu_\alpha \rangle$, 令

$$\mu_\alpha = a \tag{12}$$

$$\nu_\alpha = c \tag{13}$$

$$1 - \mu_\alpha - \nu_\alpha = b \tag{14}$$

即可得联系数

$$\alpha = a + bi + cj \tag{15}$$

此时, 直觉模糊数的得分函数 $S(\alpha)$ 的值为

$$S(\alpha) = \mu_\alpha - \nu_\alpha = a - c \tag{16}$$

从式(15)和(16)的对比可以看到, 得分函数忽略了不确定性的影响, 而联系数则全面地、系统地反映了不确定性的影响, 因此, 把直觉模糊数转换成联系数后进行决策更具科学性

3.3　权重信息不完全的直觉模糊数多属性决策问题

属性权重信息不完全给出, 属性值以直觉模糊数给出的多属性决策问题是一个有一定难度的决策问题, 本文重点讨论此问题的解决

设有 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 共 m 个方案, 每个方案各有 n 个相同的属性 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, 第 t 个方案的第 k 个属性值用直觉模糊数表示 $\alpha_{tk} = \langle \mu_{tk}, \nu_{tk} \rangle$, $\mu_{tk}, \nu_{tk} \in [0, 1]$, $t = 1, 2, \cdots, m$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 各属性权重为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 以不完全信息的形式给出, 包括下列情况: 1) 弱序: $\{w_i \geq w_j\}$; 2) 严格序: $\{w_i - w_j \geq \alpha_i\}$; 3) 倍序: $\{w_i \geq \alpha_i w_j\}$; 4) 区间序: $\{\alpha_i \leq w_i \leq \alpha_i + \epsilon_i\}$; 5) 差序: $\{w_i - w_j \geq w_k - w_t\}$, 上述中的 α_i、ϵ_i 是非负常数, 但满足 $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$, 且 $0 \leq w_k \leq 1$[10]; 此外, 为简明起见, 规定各属性值已通过规范化处理为无量纲的 α_{tk}. 要求在 m 个方案中确定出最优方案, 并作出优劣排序

4　决策步骤

步骤 1　参考前面把模糊隶属度联系数化的(6)～(11)式, 并根据题目给出的各属性权重不完全信息, 写出各属性权重的同异反联系数表达式: 把不确定部分计入 b, 确定的部分分成"肯定"或"否"两部分, 肯定部分计入 a, 否定部分计入 c. 这是由于: 当权重偏好信息用不等式给出时, 其实质是用一种区间数表示了权重, 而一些研究和应用集对分析的文献已表明: 区间数可以用联系数等价地表示, 请参考文献[16]、[22].

步骤 2　依据前述方法, 将各直觉模糊数属性值 α_{tk} 改写成联系数 r_{tk},

$$r_{tk} = a_{tk} + b_{tk} i + c_{tk} j \tag{17}$$

其中 $a_{tk} = \mu_{tk}$, $c_{tk} = \nu_{tk}$, $b_{tk} = 1 - \mu_{tk} - \nu_{tk}$.

步骤 3　建立综合评价模型

$$M(S_t) = \sum_{k=1}^{n} w_k r_{tk} \tag{18}$$

计算各方案的综合评价值 $M(S_t)$.

步骤4 依据集对分析的同异反不确定性系统理论, 考虑到直觉模糊集的对立性特点, 取 $j \in [0, 1/K]$, $K = \min(\mu_{tk})$ (同一度中的最小值) 以及 $i \in [0, 1]$ 内的 i 和 j 的代表值, 计算综合评价值 $M(S_t)$, 并依据值的大小进行排序.

步骤5 对排序结果进行不确定性分析, 对于可能得到的各种排序, 根据其期望排序作出决策. 并与其他方法所得排序结果相比较, 展开讨论和分析.

5 实例应用

为便于比较和分析, 采用文献[10]的实例.

一个家庭欲购买1台冰箱, 有5个方案 $S_1, S_2, \cdots, S_5$ 供选择, 主要的评价指标(属性)有6项, Q_1 为安全性, Q_2 为制冷性能, Q_3 为结构性能, Q_4 为可靠性, Q_5 为经济性, Q_6 为美观性. 利用统计方法, 得到各方案 S_t 对属性值 Q_k 的满意程度值 μ_{tk} 和不满意程度值 v_{tk}, $t = 1, 2, \cdots, 5$, $k = 1, 2, \cdots, 6$, 记直觉模糊数 $\alpha_{tk} = \langle \mu_{tk}, v_{tk} \rangle$, 具体见表1.

表1 直觉模糊数矩阵

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
S_1	$\langle 0.3, 0.5 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$
S_2	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.4, 0.1 \rangle$
S_3	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.2 \rangle$
S_4	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$
S_5	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.5 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$

各项指标权重信息为 $w_1 \le 0.3, w_2 \le 0.2, 0.2 \le w_3 \le 0.5, w_3 - w_2 \ge w_5 - w_4, 0.1 \le w_5 \le 0.4, w_4 \le w_1, w_4 \le 0.1, w_6 \ge 0.2$. 试对可供选择的5种冰箱作出优劣排序.

解决过程如下:

第1步 把由不等式表示的权重信息转化为联系数的形式

转化依据: 用不等式给出的权重偏好信息, 实质上是同时给出了权重 $w_t (t = 1, 2, \cdots, 6)$ 在[0, 1]区间的位置和权重 w_t 的允许变动范围, 据此可以根据题给权重偏好信息用联系数表示这个权重; 其中权重变动范围的大小用联系数中的 b 表示, 用 $i \in [0, 1]$ 表示在该范围中取值的不确定; 而这个范围所处的位置还要同时根据不等式中不等号的个数及不等号方向而定: 当不等式中只有1个不等号时, 说明这时的 b 位于[0, 1]区间紧靠某一端点的一侧, 这时 $1 - b = a + c$ 中的 a 或 c 等于零, 是 a 还是 c 等于零, 判别规则是: 当且仅当 $w_t \le p, p \in [0, 1]$ 时, $a = 0$, 例如 $w_1 \le 0.3$, 其 w_1 的允许变动范围是[0, 0.3], 所以 $b = 0.3$, 同时也得知这时的 $a = 0$, 于是知 $c = 0.7$; 类似地, 当且仅当 $w_t \ge p, p \in [0, 1]$ 时, $c = 0$; 例如 $w_6 \ge 0.2$, w_6 的变化范围是[0.2, 1], 所以 $b = 0.8$, 同时也得知这时的 $c = 0$; 当不等式中有2个不等号时, 说明这时的 b 位于[0, 1]区间的某个中间位置; 两端都不靠, 这时 $1 - b = a + c$ 中的 a 和 c 都不等于零, 各自的值可以根据题给条件直接写出, 例如 $0.2 \le w_3 \le 0.5$, 其 w_3 的变化范围是[0.2, 0.5], 所以 $b = 0.3$, $1 - b = a + c = 0.7$, 由于这时的 $a = 0.2$, 所以 $c = 0.5$.

根据题给条件, 运用上述方法, 写出各权重的联系数形式:

$$w_1 = 0 + 0.3i + 0.7j,\quad w_2 = 0 + 0.2i + 0.8j$$
$$w_3 = 0.2 + 0.3i + 0.5j,\quad w_4 = 0 + 0.1i + 0.9j$$
$$w_5 = 0.1 + 0.3i + 0.6j,\quad w_6 = 0.2 + 0.8i + 0j$$

其中 $j = 0$.

第 2 步　把模糊属性值矩阵改为联系数表示的决策矩阵, 得表 2

表 2　用联系数表示的模糊数决策矩阵

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
S_1	$0.3+0.2i+0.5j$	$0.6+0.1i+0.3j$	$0.6+0i+0.4j$	$0.8+0i+0.2j$	$0.4+0.1i+0.5j$	$0.5+0.2i+0.3j$
S_2	$0.7+0i+0.3j$	$0.5+0.2i+0.3j$	$0.7+0.1i+0.2j$	$0.7+0.2i+0.1j$	$0.5+0.1i+0.4j$	$0.4+0.5i+0.1j$
S_3	$0.4+0.3i+0.3j$	$0.7+0.1i+0.2j$	$0.5+0.1i+0.4j$	$0.6+0.1i+0.3j$	$0.4+0.3i+0.3j$	$0.3+0.5i+0.2j$
S_4	$0.6+0.2i+0.2j$	$0.5+0.1i+0.4j$	$0.7+0.1i+0.2j$	$0.3+0.5i+0.2j$	$0.5+0.1i+0.4j$	$0.7+0i+0.3j$
S_5	$0.5+0.2i+0.3j$	$0.3+0.2i+0.5j$	$0.6+0.1i+0.3j$	$0.6+0.2i+0.2j$	$0.6+0.2i+0.2j$	$0.5+0.3i+0.2j$

第 3 步　根据综合评价模型, 计算 $M(S_t)$.

$$M(S_1) = \sum_{k=1}^{n} w_k r_{1k} = 0.26 + 1.04i + 0.27i^2 + 1.02ij + 2.14j + 1.27j^2$$

类似可得,

$$M(S_2) = 0.27 + 1.19i + 0.52i^2 + 0.87ij + 2.27j + 0.88j^2$$
$$M(S_3) = 0.20 + 0.98i + 0.64i^2 + 1.14ij + 2.02j + 1.02j^2$$
$$M(S_4) = 0.33 + 1.26i + 0.19i^2 + 1.36ij + 1.88j + 0.98j^2$$
$$M(S_5) = 0.28 + 1.13i + 0.45i^2 + 1.17ij + 1.91j + 1.06j^2$$

第 4 步　由表 1, 得 $R = \min(\mu_{tk}) = 0.3$, 则 $1/R = 0.333$, 此时, $j \in [0, 0.333]$, 分别取 i 和 j 的代表值进行计算, 见表 3.

表 3　5 个方案在不确定条件下的排序

$M(S_t)$	$i=0$, $j=0$ 排序	$i=0$, $j=0.333$ 排序	$i=0.7$, $j=0.333$ 排序	$i=1$, $j=0$ 排序	期望排序
$M(S_1)$	0.26⑤	1.1134②	2.2115⑤	1.57⑤	1.2887⑤
$M(S_2)$	0.27③	1.1235①	2.4141①	1.98①	1.4469①
$M(S_3)$	0.20⑤	0.9858⑤	2.2511④	1.82③	1.3142④
$M(S_4)$	0.33①	1.0647③	2.3568②	1.78④	1.3829②
$M(S_5)$	0.28②	1.0335④	2.3178③	1.86②	1.3728③

第 5 步　确定排序顺序.

由表 3 可以看出, 在不确定条件下, 分别让 i 和 j 取不同的值, 5 个方案有着不同的排序, 从数学期望的意义上取综合评价值的平均值, 得到"期望排序"(表 3 的最右列): $S_2 \succ S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_1$ (符号 $\succ$ 表示"优于"), 这个排序与文献[10]的结果一致, 也与表 3 中 $i = 0.7$, $j = 0.333$ 时的排序结果相同, 最优方案是 S_2.

6 结 语

1) 信息不完全直觉模糊多属性决策问题中的不确定性是客观存在的, 并影响着决策的结果, 从这个意义上说, 信息不完全直觉模糊多属性决策必须充分考虑到不确定性的影响, 要在科学地分析和讨论的基础上给出决策结果, 以期望排序得到的结果有其合理性

2) Zadeh 的工作为研究事物的模糊不确定性提供了一种开创性的思路, 并启迪后继者进一步提出直觉模糊集和V aurge 集等概念, 其他研究人员也正努力改进和完善Zadeh 的工作. 但到目前为止, 如何深刻地认识模糊不确定性的本质, 并且客观地用更适当的数学工具来描述模糊不确定性依然是相关研究人员要深入研究的课题. 在这方面, 集对分析理论及其联系数为我们提供了新的思路和新的数学工具. 本文根据集对分析把倒数型对立与模糊不确定性相对应的思想, 明确地给出了联系数用于直觉模糊多属性决策问题的新途径, 即将隶属度与联系数中相对确定的同部相对应, 非隶属度与联系数的相对确定的反部相对应, 将犹豫度与联系数中相对不确定的异部相对应, 从实例可以看出, 此种方法全面地考虑了不确定性的影响, 结果可靠. 但要指出的是, 不能由此得出直觉模糊集与同异反联系数等价的结论, 这是由于同异反联系数的反部中含有系数 j, 在异部中含有系数 i, 在多个联系数的加乘及其它运算过程中, i, j 都直接参与运算, 因而在形式上看去是同样的运算过程, 如(18) 式所示的线性加权综合评价模型, 联系数的运算要比直觉模糊集的运算更为复杂; 加上 i, j 可以在给定的定义域中取不同的值, 使得计算结果能充分体现不确定性的影响, 人们所希望的 "if than "这种在不确定性条件下的灵活决策能借助联系数运算得到实现; 相比之下, 利用直觉模糊集建模运算得到一个刚性的结果, 不太符合客观实际, 令人难以接受

3) 从不完全信息形式的权重表达形式可以看到, 有的权重是属于模糊不确定性, 有的权重是不确知不确定性, 因此, 对于将不完全信息形式的权重改写为联系数的表述, 需要依据所给的条件给出符合条件的联系数表达, 既有一定的规则可循, 也需要一定的"直觉". 实例应用表明, 这一做法的优越之处在于避开了用繁琐的线性规划求解权重的过程, 具有简洁性和实用性

4) 不确定性是使客观事物复杂多变的原因之一, 模糊不确定性也起着这样的作用. 但模糊与不模糊是对立的统一, 利用联系数的同异反辩证关系和相互作用来刻画模糊性是一个较好的途径, 与直觉模糊数理论比较具有较大的优势; 当然, 更深入的理论研究有待于进一步的探索和深入, 但本文提出的基于集对分析联系数的决策方法不失为是不完全直觉模糊多属性决策的一种新途径

参考文献:

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Inform and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov KT. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999.

[4] Bustince H, Herrera F, Montero J. Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2007.

[5] Chen SM, Tan JM. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.

[6] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3): 403-405.

[7] Hong D H, Choi CH. Multicriteria fuzzy decision- making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets

and Systems, 2000, 114(1): 103-113.

[8] Atanassov K, Pasi G, Yager R R. Intuitionistic fuzzy interpretations of multi-criteria multi-person and multi-measurement tool decision making[J]. International Journal of Systems Science, 2005, 36(14/15): 859-868.

[9] Li D F. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2005, 70(1): 73-85.

[10] 徐泽水. 直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(11): 62-71.

[11] 南江霞, 李登峰, 张茂军. 直觉模糊多属性决策的TOPSIS 法[J]. 运筹与管理, 2008, (3): 38-41.

[12] 胡辉, 徐泽水. 基于TOPSIS 的区间直觉模糊多属性决策法[J]. 模糊系统与数学, 2007, (5): 112-116.

[13] 戴跃强, 徐泽水, 达庆利. 基于不同直觉偏好结构的多属性决策方法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2007, (4): 162-166.

[14] 赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2000, 3.

[15] 赵克勤, 宣爱理. 集对论—一种新的不确定性理论方法与应用[J]. 系统工程, 1996, 14(1): 18-23.

[16] 叶跃祥, 糜仲春, 王宏宇, 梁晓艳. 一种基于集对分析的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1344-1347.

[17] 汪新凡, 杨小娟. 基于联系数贴近度的区间数多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(3): 18-24.

[18] 张斌. 不确定性信息处理的集对论思想与方法[J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(2): 89-93.

[19] 赵克勤. 集对分析中的不确定系统理论在AI 中的应用[J]. 智能系统学报, 2006, 1(2): 16-25.

[20] 赵克勤. 基于集对分析的对立分类、度量及应用[J]. 科学技术与辩证法, 1994, 11(2): 26-30.

[21] 黄德才, 赵克勤, 陆耀忠, 洪宁. $a+bi+cj$ 型联系数的四则运算及其应用[J]. 机电工程, 2000, 17(3): 81-83.

[22] 刘秀梅, 赵克勤. 基于联系数复运算的区间数多属性决策方法及应用[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(23): 7-63.

Multiple Attribute Decision Making with the Incomplete Information and Intuitionistic Fuzzy Number Based on the Connection Number of Set Pair Analysis

LIU Xiu-mei[1], ZHAO Ke-qin[2]

(1. Department of Mathematics, Lianyungang Teachers College, Lianyungang 222006, China)
(2. Zhuji Institute of Connection Mathematics, Zhuji 311811, China)

Abstract: The multiple attribute decision making with the incomplete information and intuitionistic fuzzy number is of uncertainty, which comes from the incomplete information of attribute weights and the attribute values' expression of the intuitionistic fuzzy number. In order to depict the uncertainty and avoid one-sidedness and inaccuracy by scoring function, we can transform incomplete weights and intuitionistic fuzzy numbers of attribute values into connection numbers of set pair analysis theory, and then establish a new method for multiple attribute decision making with the intuitionistic fuzzy, by analyzing the causes of the uncertainty, and then make a decision. An illustrative example is also given to demonstrate the feasibility and rationality of the proposed method.

Keywords: incomplete information; intuitionistic fuzzy number; multiple attribute decision making; uncertainty; connection number; set pair analysis