地震作用分析的振型分解反应谱法

1 基础知识

1.1 多自由度系统振型的正交性

多自由度体系动力学特征方程为

$$[K]\{\phi\}=\omega^2[M]\{\phi\}$$

将上式分别对应到第 i 和第 j 阶振型，可得 $\begin{cases}[K]\{\phi_i\}=\omega_i^2[M]\{\phi_i\}\\ [K]\{\phi_j\}=\omega_j^2[M]\{\phi_j\}\end{cases}$

将上式分别左乘 $\{\phi_j\}^T$ 和 $\{\phi_i\}^T$，得到

$$\begin{cases}\{\phi_j\}^T[K]\{\phi_i\}=\omega_i^2\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_i\}\\ \{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\}=\omega_j^2\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}\xrightarrow{\text{两边转置}}\{\phi_j\}^T[K]\{\phi_i\}=\omega_j^2\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_i\}\end{cases}$$

注意到[K]和[M]为对称矩阵，故转置是成立的，于是有

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_i\}=0$$

当 $i\neq j$ 的时候，$\omega_i\neq\omega_j$，此时：$\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_i\}=0\quad(i\neq j)$

代入动力学特征方程又有：$\{\phi_j\}^T[K]\{\phi_i\}=0\quad(i\neq j)$

以上结论说明多自由度系统关于刚度矩阵[K]和质量矩阵[M]是正交的。

1.2 地震反应谱

为便于求解地震作用，将单自由度体系的地震最大绝对加速度反应与其自振周期 T 的关系定义为地震加速度反应谱，简称**地震反应谱**。

单自由度体系一般地面运动强迫振动（见单自由度受迫振动相关内容）的解由 Duhamel 积分可知

$$x(t)=-\frac{1}{\omega_D}\int_0^t\ddot{x}_g(\tau)e^{-\varsigma\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)d\tau$$

上式求二阶导 $\ddot{x}(t)=\omega_D\int_0^t\ddot{x}_g(\tau)e^{-\varsigma\omega_n(t-\tau)}\{[1-(\frac{\varsigma\omega_n}{\omega_D})^2]\sin\omega_D(t-\tau)+2\frac{\varsigma\omega_n}{\omega_D}\cos\omega_D(t-\tau)\}d\tau-\ddot{x}_g(t)$，当 $\omega_n\approx\omega_D$ 时，

$$\ddot{x}(t)=\omega_n\int_0^t\ddot{x}_g(\tau)e^{-\varsigma\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau-\ddot{x}_g(t)$$

得到**质点绝对加速度最大值**表达式

$$S_a(T)=\left|\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}(t)\right|_{\max}\approx\left|\omega_n\int_0^t\ddot{x}_g(\tau)e^{-\varsigma\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right|_{\max}$$

其中 $\omega_n=\dfrac{2\pi}{T_n}$。

地震加速度反应谱可理解为一个确定的地面运动，通过一组阻尼比相同但自振周期各不相同的单自由度体系，所引起的各体系最大加速度反应与相应体系自振周期间的关系曲线。

1.3 地震影响系数与地震反应谱的关系

$$a(T_n)=\frac{mS_a(T_n)}{G}=\frac{S_a(T_n)}{g}$$

具体涉及到设计反应谱的编制内容将另外撰文总结

2 质点 *i* 在任意时刻的水平相对位移反应

由振型的正交性可知，$\{\phi_1\}$、$\{\phi_2\}$，……，$\{\phi_n\}$ 相互独立，故体系的位移反应向量 $\{x\}$ 可表示成

$$\{x\}=\sum_{j=1}^{n}q_j\{\phi_j\}$$

其中 q_j 可理解为 $\{x\}$ 在线性空间 $\{\phi_j\}$ 下的坐标值，且 q_j 是时间的函数。

有阻尼多自由度体系在地震作用下的运动方程如下

$$[m]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=-[M]\{1\}\ddot{x}_g$$ ，其中 $\ddot{x}_g$ 为地面加速度

用振型向量表示，得

$$\sum_{j=1}^{n}([m]\{\phi_j\}\ddot{q}_j+[C]\{\phi_j\}\dot{q}_j+[K]\{\phi_j\}q_j=-[M]\{1\}\ddot{x}_g$$

两边左乘 $\{\phi_i\}^T$ 得

$$\sum_{j=1}^{n}(\{\phi_i\}^T[m]\{\phi_j\}\ddot{q}_j+\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_j\}\dot{q}_j+\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\}q_j=-\{\phi_i\}^T[M]\{1\}\ddot{x}_g$$

由振型向量的正交性，当振型关于阻尼矩阵也正交的时候，即 $\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_j\}=0\quad i\neq j$ ，有

$$\{\phi_i\}^T[m]\{\phi_i\}\ddot{q}_i+\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_i\}\dot{q}_i+\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_i\}q_i=-\{\phi_i\}^T[M]\{1\}\ddot{x}_g \qquad (*)$$

由方程 $\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_i\}=\omega_i^2\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}$ 可知 $\omega_i^2=\dfrac{\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}}$

如果令 $2\omega_i\varsigma_i=\dfrac{\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}}$， $\gamma_i=\dfrac{\{\phi_i\}^T[M]\{1\}}{\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}}$，(*)式可化简为

$$\ddot{q}_i+2\omega_i\varsigma\dot{q}_i+\omega_i^2q_i=-\gamma_i\ddot{x}_g$$

其中 ς_i 称为第 i 阶振型的**阻尼比**，而 γ_i 称为第 i 阶振型的**振型参与系数**

由 Duhamel 积分可求以上 n 个独立的关于 q_i 的微分方程的解为

$$q_i(t)=-\frac{1}{\omega_{iD}}\int_0^t\gamma_i\ddot{x}_g(\tau)e^{-\varsigma_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_{iD}(t-\tau)d\tau$$ ，其中 $\omega_{iD}=\omega_{in}\sqrt{1-\varsigma_i^2}$ 为第 i 阶振型的**有阻尼固有频率**

注意到阻尼比为 ς_i，自振频率为 ω_{in} 的单自由度体系在地震作用下的动力方程 $\ddot{\Delta}+2\omega_{in}\varsigma_i\dot{\Delta}+\omega_{in}^2\Delta=-\ddot{x}_g$ 的解为

$$\Delta=-\frac{1}{\omega_D}\int_0^t\ddot{x}_g(\tau)e^{-\varsigma_i\omega_{in}(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)d\tau$$

由此可知， $\Delta_i(t)$ 实际是阻尼比为 ς_i，自振频率为 ω_i 的单自由度体系在地震作用下的**地震位移反应**。

于是

$$q_i(t)=\gamma_i\Delta_i(t)$$

多自由度体系地震位移反应的解为

$$\{x(t)\}=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\Delta_j(t)\{\phi_j\}=\sum_{j=1}^{n}\{x_j(t)\}$$

其中 $\{x_j(t)\}=\gamma_j\Delta_j(t)\{\phi_j\}$ 为体系第 j 阶振型的地震反应。

质点 i 在第 j 阶振型下的水平相对位移为

$$x_{ij}(t)=\gamma_j\Delta_j(t)\phi_{ji}$$

3 质点 *i* 在任意时刻的地震惯性力

i 质点在任意时刻的水平相对位移反应为

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\Delta_j(t)\phi_{ji}$$

求二阶到，可得任意时刻的水平相对加速度反应为

$$\ddot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\ddot{\Delta}_j(t)\phi_{ji}$$

将单位向量表示为 $\{\phi_i\}$ 的线性组合，有

$$\{1\}=\sum_{i=1}^{n}a_i\{\phi_i\}\Rightarrow\{\phi_j\}^T[m]\{1\}=\sum_{i=1}^{n}a_i\{\phi_j\}^T[m]\{\phi_i\}\overset{\text{正交性}}{=}a_j\{\phi_j\}^T[m]\{\phi_j\}$$

$$a_j=\frac{\{\phi_j\}^T[m]\{1\}}{\{\phi_j\}^T[m]\{\phi_j\}}=\gamma_j$$

所以 $\{1\}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\{\phi_i\}\Rightarrow\ddot{x}_g(t)=(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\phi_{ji})\ddot{x}_g(t)$。

故质点 i 任意时刻的水平地震惯性力为

$$f_i=-m_i[\ddot{x}(t)+\ddot{x}_g(t)]=-m_i\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\phi_{ji}[\ddot{\Delta}_j(t)+x_g(t)]=\sum_{j=1}^{n}f_{ji}$$

其中 f_{ji} 为质点 i 的第 j 振型水平地震惯性力 $f_{ji}=m_i\gamma_j\phi_{ji}[\ddot{\Delta}_j(t)+\ddot{x}_g(t)]$

4 质点 *i* 的第 *j* 振型水平地震作用

质点 *i* 第 *j* 振型水平地震作用定义为该阶振型最大惯性力，即 $F_{ji}=|f_{ji}|_{\max}=m_i\gamma_j\phi_{ji}|\ddot{\Delta}_j(t)+\ddot{x}_g(t)|_{\max}$

$\ddot{\Delta}_j(t)+\ddot{x}_g(t)$ 是自振频率为 ω_j，阻尼比为 ς_j 的单自由度体系的地震绝对加速度反应，由地震反应谱的定义可知

$$S_a(T_j)=\left|\ddot{\Delta}_j(t)+\ddot{x}_g(t)\right|$$

于是，可将质点 i 的第 j 振型水平地震作用表达为

$$F_{ji}=m_i\gamma_j\phi_{ji}S_a(T_j)$$

或者

$$F_{ji}=G_i\alpha_j\gamma_j\phi_{ji}$$

5 振型组合

由振型 j 各质点水平地震作用，按静力分析方法计算，可得体系振型 j 最大地震反应 S_j，从而估计特定体系最大地震反应 S，由 SRSS 法（另外整理）得估计方法为

$$S=\sqrt{\sum S_j^2}$$