二元联系数 $A+Bi$ 的理论基础与基本算法及在人工智能中的应用

赵克勤
（诸暨市联系数学研究所，浙江 诸暨 311811）

摘　要：二元联系数 $A+Bi$ 的特点是把确定性测度与不确定测度联系在一起，基本思想是把一个确定集与一个不确定集联系在一起去研究同一个客观对象，其理论基础是集对论，概率、模糊隶属度、区间数可以转换成二元联系数，基本算法简明实用，因而可用于不同不确定性问题的处理.

关键词：人工智能；二元联系数 $A+Bi$；集对论；不确定测度；不确定性
中图分类号：TP18　**文献标识码**：A　**文章编号**：1673-4785(2008)06-0476-11

The theoretical basis and basic algorithm of binary connection $A+Bi$ and its application in AI

ZHAO Ke-qin
(Institute of Zhuji Connection Number, Zhuji 311811, China)

Abstract: The binary connection number $A+Bi$ connects the deterministic measure and the non-deterministic measure together. Its basic idea is to combine one deterministic set and one non-deterministic set together to describe an identical research object. Its theoretical basis is set pair theory, with which the probability, the fuzzy membership and the interval number can be converted to a binary connection number, so its basic algorithm is simple and practical and can be used to deal with various non-deterministic problems.

Keywords: artificial intelligence; binary connection number $A+Bi$; set pair theory; non-deterministic measure; uncertainty

集对分析（Set pair analysis, SPA）中的联系数已在包括人工智能在内的许多领域得到应用[1-2]. 其中的不少工作是应用二元联系数 $A+Bi$（以下也简称二元联系数或联系数）. 例如黄德才等把二元联系数用于网络计划[3]，高淑萍等把二元联系数用于系统应急时的资源调度[4]，郭瑞林等人把其应用于小麦育种[5]，金华征等应用二元联系数创建了电网灵活规划方法[6]，张清河等人把其应用于钢筋抗拉强度测量中的不确定度计算和预先危险性分析[7-8]，宋向炯把其应用于大学物理实验空气比容比热测定不确定度近似计算方法的改进[9]，吴亭把其应用于系统可靠性的计算[10]，杨继荣把其用于机器制造中的误差分析[11]，王霞应用复数理论研究二元联系数的算法[12]，又在文献[13]中对观测数据用二元联系数表示时的方差分析作了研究，最近汪新凡又给出了一种基于二元联系数的区间型多属性决策新方法[14]. 作者在文献[2]中把二元联系数用于有关群体智能测算、不确定性推理等问题研究，给出了“皮匠-和尚”群体效能数学模型和“打鸟问题”的数学模型等等. 二元联系数是把研究对象的确定性测度与不确定性测度联系起来的一种结构函数，客观上指示出一个相对确定的观测量（A）与所附带的不确定性信息（Bi）；因而与国际标准化组织（ISO）1993 年提出的《测量不确定度表示指南》（guide to the expression ofuncertainty in measurement, GUM）[15]以及国家技术监督局 1999 年颁布的《测量不确定度评定与表示》（JJF1059-1999）[16]关于测量数据应同时标出其不确定度的要求有相通之处. 其

收稿日期：2008-03-31.
通信作者：赵克勤. E-mail: zjzhaok@sohu.com.

物理意义则根植于“测不准原理”. 由于在人工智能领域中,诸于数据融合、信息处理、不确定性推理、自然语言理解、机器制造等不少问题的深入研究和具体解决都与这种或那种不确定性有关;为此,本文对二元联系数的理论基础和基本算法,以及二元联系数与其他数系的关系作一综述,并举例说明在人工智能中的应用,以促进人工智能和联系数学的发展.

1　二元联系数的理论基础

1.1　不确定原理

这要从集合论中的罗素悖论说起[17]. 罗素悖论是:村上有一个理发师,贴出服务公告,宣称他为所有不为自己理发的人理发,根据集合论,这些人能组成一个集合 A;但由此引出一个问题,理发师自己的头该由谁理发? 如果他不为自己理发,那么,理发师属于 A,但这样一来,理发师又不能给自己理发了,也就是不能属于 A,那么,理发师自己的头究竟该由谁理发?

上面这个理发师悖论是由英国数学家和哲学家罗素(Bertrand Russell, 1872-1970)于 1903 年发现,所以也称罗素悖论.

罗素悖论的发现,说明了由德国数学家康托(Georg Cantor, 1845-1918)提出的,已被作为现代数学基础的集合论存在着矛盾. 这个矛盾是如此地显而易见,在构造一个普通的集合时就存在于这个集合中. 这震动了当时的数学界,正如著名的法国数学家庞加莱(Henri Poincare,1854-1912)所坦言,“我们围住了一群羊,然而在羊群中也可能围进了狼”.

100 多年来,数学家们围绕集合论中的悖论进行了长时期的深入研究和激烈争论. 在发现理发师悖论的前后,人们陆续发现了其他悖论,如“说谎者悖论”等. 有关罗素悖论的争论和研究至今仍在继续,研究的核心是如何把围进去的狼从羊群中赶出去.

有意思的是,从生态学角度看,狼羊共存是客观事实. 从哲学角度看,对立统一是客观世界的一条基本规律. 作者据此思考罗素悖论,发现罗素悖论已用事实告诉人们:对于给定的客观对象 O(objective target)的全体所组成的集合 X_o,必存在着这样的个体(元素) i,它既属于 X_o,又不属于 X_o. 由于这一事实符合对立统一规律,又源自对罗素悖论的思考,这里称其为是基于罗素悖论的不确定原理.

历史上,德国物理学家海森堡于 1927 年提出“测不准原理”. 该原理表明:一个微观粒子的某些物理量(如位置和动量,或方位角与动量矩,还有时间和能量等),不可能同时具有确定的数值,其中一个量越确定,另一个量的不确定程度就越大. 测量一对共轭量的误差的乘积必然大于常数 $h/2\pi$(h 是普朗克常数). “测不准原理”反映了微观粒子运动的基本规律,是量子力学的一个基本原理,也是现代物理学的一个重要原理. 通常,人们也把海森堡的“测不准原理”称为“不确定原理”.

现在要问,海森堡的“测不准原理”与上面说的基于集合论的“不确定原理”是相通的吗? 回答是肯定的. 这只要注意到“测不准原理”是针对微观层次上的粒子而言;但从广义上看,“个体”相对于“全体”,恰好处于微观层次. 从这个意义上说,前面基于罗素悖论的“不确定原理”有其物理意义,这个物理意义就是海森堡的“测不准原理”.

事实上,就认知而言,微观纯粹是相对于宏观而言的一个概念,类似于前面的“全体是宏观,个体是微观”之说. 在生物学中还有:个体是宏观,细胞是微观. 细胞是宏观,基因是微观;在物理学与化学中:肉眼见到的物体是宏观,借助显微镜等仪器见到的物体是微观;大量分子聚集在一起是宏观,少量分子和单个分子是微观;年度是宏观,时刻是微观;高层是宏观,低层是微观. 相对于沙子来说,沙漠是宏观,但沙漠相对于地球来说也是微观. 同样,相对于太阳系来说,地球是微观,但太阳系相对于河外星系来说,太阳系也可以看成是微观. 在社会经济学中:全局是宏观,局部是微观;长远是宏观,眼前是微观;全球经济是宏观,村落经济是微观. 在智能机器人制造中:整机是宏观,零件是微观;硬件是宏观,软件是微观. 在机器信息处理中,信息的输入输出是宏观,在机器内部进行信息处理是微观. 人工智能理论是宏观,具体的人工智能技术是微观,如此等等,这就意味着当把一事物在宏观层次上的表现与微观层次上的表现相联系作全局性考虑时,不可避免地存在不确定性. 因此,前面说的基于罗素悖论的不确定原理也可以称为是“系统不确定原理”或“全局不确定原理”.

1.2　不确定集

或许是受上面所说的隐藏在罗素悖论中的“不确

定原理”的启发,使人们认识到在集合论中,不仅需要有确定集的概念,还需要有“不确定集”的概念. 例如“模糊集”等等. 但由于对立统一是客观世界的普遍规律,不把不确定集与确定集联系起来作为一个整体研究,很难对一个不确定集作广泛和深入的分析,反之亦然. 这个道理的物理意义也显而易见:设想没有参考系,即使是一个质点也难以开展客观描述和深入分析. 正因其如此,集对分析不把研究的着眼点放在单个不确定集上,而是把不确定集与确定集作为一个系统来加以处理,是因为根据系统科学理论,组成系统的要素与要素之间存在相互联系.

1.3 成对原理

成对原理是指“事物或概念都是成对地存在”. 例如:东西、南北、上下、宏微、刚柔、软硬、虚实、进退、来回、大小、胜负、高低、胖瘦、好坏、美丑、善恶、阴阳等,以及作用力与反作用力、化合与分解、正电与负电、太阳与地球、月亮与星星、火箭与飞船、物质与能源、信息与知识、知识与智能、人脑与电脑,以及正数与负数、实数与虚数、函数与图表、图像与方程、精确解与近似解等,还有系统与环境、历史与未来、教师与学生、领导与群众、工人与农民、商人与医生、官员与市民、生存与发展、投资与回报、改革与创新、计划与市场、确定性与不确定性等等,无一例外地是成对地存在. 正是由于成对原理的制约,以至于在一般意义上泛指某一事物时,同时在有意无意地拿与该事物成对的另一事物作参考,如人们在说某数是正数时,同时在有意无意拿负数作参考;在指某一事物具有不确定性时,其实在同时拿该事物与之成对的它事物之确定性作参考;如此等等,不一而足. 从哲学的观点看,成对原理无非是关于“对立统一法则”、“事物相互联系原理”的一种新的表述,从数学的角度看,成对原理的阐明意味着作为数学理论基础的集合论扩充为以研究两个集合确定与不确定联系及其可变与转化为主要内容的集对论成为必要;因为成对原理可以用集合论的语言等价地表示成“不能独立存在概念上完全纯粹单一的集合”[18].

1.4 集对论

集对就是由两个集合所组成的一个基本单位. 为什么要给出这样一个基本单位? 一是源于对集合论中悖论的思考,尤其是对罗素悖论的思考;二是受物理学“测不准原理”的启发;三是哲学上关于“客观事物处于普遍联系之中”,“对立统一是客观世界的普遍规律”的思想启发而提出的“成对原理”;这些在上面已提及. 另一方面是从实际研究中得到的认识:面对一个具体的客观对象 O,不仅存在着关于该对象的确定的集合 A,还存在着关于该对象的不确定的集合 B;而且不确定的集合 B 总是与确定的集合 A 联系在一起. 也只有把这两个集合联系起来同时描述这个给定的客观对象 O 时,才得到关于 O 的一个全面的客观描述. 反过来也是如此,描述给定对象 O 的一个确定集 A 总是与关于该对象的一个不确定集 B 联系在一起. 换言之,当试着确定一个集合中的元素是某种对象的全体时,必然有不能确定是否应该属于这个确定集的元素在其中,例如理发师悖论中的那位理发师(全局不确定),如果你要把这位理发师排除在外,那么你的研究对象又成为某种“部分”的东西,所得的结论又会犯“以偏概全”的错误(局部不确定). 总之,正如人们需要用成对的感官(两只眼睛、两只耳朵、两个鼻孔、两只手、两条腿)去感知外界环境那样,对于给定的一个客观对象,需要同时用两个集合去描述人们所要研究的事物. 由于大脑的认知比感知高级,概念比感觉深刻;所以,为了客观地反映所要研究的事物,这两个集合一般地说,必须一个是确定的集合,另一个是不确定的集合. 特殊情况下,也可以两个都是不确定集,或两个都是确定集. 由于这样的两个集合相辅相成地描述同一个客观对象,自然应该把它们放在同一个研究单位中以体现出这两个集合在本来意义上的相互联系,把这个单位形象地称之为“集对”也就是自然的一件事情. 当然,对此也可以有另外的形象化称呼,例如“双集合”,这时的集对理论也可以称为“双集合理论”;但从基本概念要求从简这个角度看,集对这个概念显然比“双集合”更为简洁,也更富有内涵. 当然,从“双集合”出发,自然可以进一步引出“三集合”,“四集合”……“多集合”的概念,相应地引出“三集合理论”,“四集合理论”……“多集合理论”等;但这些概念或理论都得以集对这个概念为基础,因为在多集合的相互联系中,两个集合之间的相互联系仍然是一种最基本的联系. 有关集对的理论简称集对论. 刻划集对中两个集合确定性测度与不确定性测度及其相互关系的数学工具是二元联系数.

1.5　二元联系数与不确定量

数学认为,数是量的描述. 据此可问,二元联系数 $A+Bi$ 描述的量是什么量? 为此,作者在文献[1]中给出了不确定量的概念,不确定量是在宏观上确定而在微观上不确定的量. 不确定量与常量、变量的关系见表 1.

表 1　常量、变量、不确定量在宏观与微观 2 个层次上的确定、不确定分布

Table 1　The distribution of constant, variable, uncertain variables on the macroscopy and microscopy

量	宏观	微观	例子
常量	确定	确定	圆周率 π
变量	不确定	确定	自由落体速度 V
不确定量	确定	不确定	粒子的动量
超不确定量	不确定	不确定	

根据表 1,数学可以分为常量数学、变量数学、不确定量数学. 初等算术、初等几何属于常量数学;迪卡尔的解析几何与牛顿-莱布尼兹的微积分构筑的是变量数学的大厦;由于不确定量的不确定性与确定性在层次上的分布正好与变量相反,提示关于不确定量的数学与关于变量的数学会有很大的不同.

另一方面,可以看到,这里说的不确定量是在宏观层次上确定,在微观层次上不确定的量,显而易见,这与前面所说的不确定原理相符.

要指出的是,虽然二元联系数 $A+Bi$ 是描述不确定量的一种数;但在作深入一个层次的分析时,又常把 A 称为确定量,把 Bi 称为不确定量,A 和 Bi 统称为二元联系数的联系分量,简称联系分量. 考虑到确定量与不确定量的相互影响,在进一步的分析中,还可以在 A 中解析出一定的偏不确定量,与此同时在 Bi 中解析出偏确定量,依次类推,并由此导出三元和多元联系数.

1.6　二元联系数在实数轴上的表示

无论是从形式看,还是从含义看,二元联系数 $A+Bi$都是关于给定客观对象的一种结构函数. 其中的 A,B 为非负实数,分别是确定集 A 的基数$\underline{\underline{A}}$(确定的关系数),为简洁起见,取$\underline{\underline{A}}=A$;$B$ 是不确定集 B 的基数$\underline{\underline{B}}$(具有不确定性的关系数),为简洁起见,取$\underline{\underline{B}}=B$; i 是 B 的系数,在$[-1,1]$区间取值,具体取何值要根据对研究对象作"微观"层次上的分析而定,因而具有不确定性,由此进一步说明 B 的不确定性. 因其如此,二元联系数也被称为不确定联系数,其中当 $A>B$ 时,$A+Bi$ 是一个假不确定二元联系数,意指只有部分论域具有不确定性(如图 1 中$[A-B,A+B]$这个区间),而另一部分论域是确定的(图 1 中$[0,A-B]$这个区间). 反之,当 $A<B$ 时,$A+Bi$ 是一个真不确定二元联系数,意指整个论域都充满不确定性(见图 2).

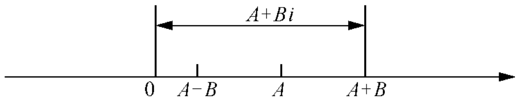

图 1　二元联系数 $A+Bi(A>B)$ 在数轴上的表示

Fig. 1　The binary connection number $A+Bi$ $(A>B)$ representation on the number axis

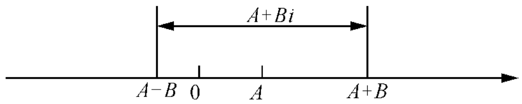

图 2　二元联系数 $A+Bi(A<B)$ 在数轴上的表示

Fig. 2　The binary connection number $A+Bi$ $(A<B)$ representation on the number axis

1.7　二元联系数的集对解释

从集对论的意义上说,二元联系数 $A+Bi$ 是关于对象集 O 的两个映射集合的联合函数. 例如在罗素悖论中,设村上包括理发师在内共有 100 人,这是研究对象,其中不能为自己理发的有 99 人,确定属于理发师的服务范围($A=99$),加上理发师 1 人不能确定是否属于理发师的服务范围($B=1$),于是得联系数 $A+Bi=99+1i$,这个联系数的集对意义显然是关于"所有不为自己理发的人"这个对象集 O 的两个映射集合 A(确定集)与 B(不确定集)的基数之联系和.

由此例可见,二元联系数 $A+Bi$ 表示出确定集 A 与不确定集 B 这两个集合基数之"联系和". 在集对分析中,"联系和"一般用"⊕"表示,当这种"联系和"仅指代数意义上的"数值和"时,"⊕"可以改用"+". 特别地,在集对分析中,称 $N=A+B$ 为二元联系数 $A+Bi$ 的联系范数,N 的大小表示了论域的大小.

综上可知,基于罗素悖论的不确定原理、成对原理、集对论以及不确定量概念等内容共同构成了二元联系数 $A+Bi$ 的理论基础,当然,这个基础的某些微细结构还需要深入研究,例如,不确定量与常量、变量之间的转换等等.

2 二元联系数与不同数系的关系

2.1 二元联系数与概率的关系

由于概率 P 是一个在 0 ~ 1 取值的实数,因而可以联系数化成 $P+(1-P)i$,这是可行性. 另一方面,把概率 P 联系数化成联系数 $P+(1-P)i$ 也是必要的,因为概率是从宏观层次上对随机不确定性的数学描述,所以显示出随机不确定性的确定性;但在微观层次上,显示出随机不确定性其本质上的不确定性. 因此,当显示出需要同时从宏观与微观两个层次上考虑随机不确定性的程度、作用和影响时,把概率 P 联系数化成 $P+(1-P)i$ 就显得完全必要,有关这方面的进一步论述请参见文献[2]. 要指出的是,把概率用联系数的形式表示在理论和实践上都有重要的意义. 不妨来看一个例子,在经典概率论中,有一个"小概率原理",该原理是说,概率非常小的事件在某次观察中几乎是不可能发生的,比如一个人买 2 元钱彩票得 500 万元大奖就是一个小概率事件,其概率大约是 0.00000001,按经典概率论,因为 0.00000001 接近于零,几乎不可能发生;但把这个概率表示成联系数的形式后得到的是 $0.00000001+0.99999999i$,后面这个 $0.99999999i$ 说明这个小概率事件在一次观察中不发生的不确定性非常之大. 这个例子一方面说明可能性不等于不确定性,另一方面可以在一定程度上解释为什么人们明知中大奖的可能性非常小,而仍然踊跃购买彩票这种社会现象.

另一个有实际意义的例子是机动车的行驶安全问题,通常而言,一辆机动车在行驶时出事故是一个小概率事件,但实际上,每一个机动车驾驶员的每次出车都必须把安全放在第一位. 用联系数的语言来说,就是要高度重视"小概率"所附带的那个"大补数"所具有的不确定性,它随时都有可能把出事故的"小概率"转化为 1.

把概率转换成一个联系数的工作称为概率的联系数化. 这一工作的意义从信息利用的角度看,无非是捡起了经典概率论在概率表述上所丢弃的那个补数中所含有的随机不确定信息. 由于概率是概率论的基石,利用二元联系数捡回这部分信息,是为概率论重新奠基的一项基础工作. 应用二元联系数使概率所携带的随机不确定信息完整化、系统化和客观化,其结果将为概率论及其相关学科的研究与应用开辟出新的天地.

2.2 二元联系数与模糊隶属度的关系

模糊隶属度可以转换成一个二元联系数,并由此显化出一个模糊隶属度所携带的另一部分"模糊"信息.

根据模糊集理论,设 U 是论域,u 是 U 中的任一元素,$A(u)$ 是 U 的一个模糊子集,$A(u)$ 的隶属函数 $\mu A(u)$ 的定义为:$\mu A(u) \to [0,1]$,也就是 $1 \geqslant \mu A(u) \geqslant 0$. 按集对论,这里的 $\mu A(u)$ 是对 $A(u)$ 的一个确定的描述,还应同时有一个不确定的描述 $[1-\mu A(u)]i$,$i \in [-1,1]$(以下同),而 $[1-\mu A(u)]$ 正好是 $\mu A(u)$ 的补数;于是,对 $A(u)$ 的一个完整的描述应当是 $\mu A(u)+[1-\mu A(u)]i$,容易看出,$[1-\mu A(u)]i$ 是 $\mu A(u)$ 所携带的另一部分"模糊"信息,但按模糊集理论,这一部分"模糊"信息是作为"不模糊"信息对待的,至少是忽略不计,这种忽略不计有时会导致模糊推理结果的不确定性达到最大,请看下例.

在模糊集理论中,认为 $\mu A(u)=0.5$ 时,$\mu A(u)$ 的模糊程度最大,因为最"模棱两可",但没能在数学上说明这个"最大模糊程度". 按集对论,模糊隶属度 $\mu A(u)=0.5$ 的联系数表述为 $0.5+0.5i$,当 i 在 $[-1,1]$ 变动时,$0.5+0.5i$ 在 $[0,1]$ 变动,其模糊程度为 $1-0=1$,从而从数学意义上说明了这个"最大模糊程度",此时作出的模糊推理结果,其不确定性最大.

作为一个比较,来计算 $\mu A(u)=0.9$ 时的模糊程度. 按集对论,这时有联系数 $0.9+0.1i$,当 i 在 $[-1,1]$ 变动时,$0.9+0.1i$ 在 $[0.8,1]$ 变动,其模糊程度为 0.2,此时作出的模糊推理结果,其不确定性显然较小.

但有时,忽略不计模糊隶属度 $\mu A(u)$ 所携带的另一部分"模糊"信息,又会使所得结论过于"刚性".

把模糊隶属度转换成一个联系数的工作称为模糊隶属度的联系数化. 这一工作的意义从信息利用的角度看,无非是捡起了模糊集理论在模糊隶属度表述上所丢弃的那个补数中所含有的模糊不确定信息. 由于模糊隶属度是模糊集理论的基石,利用二元联系数捡回这部分信息,是为模糊集理论重新奠基的一项基础工作. 应用二元联系数使模糊隶属度所携带的模糊不确定信息完整化、系统化和客观化,其结果将为模

糊集的理论与应用研究开辟出新的天地.

2.3　二元联系数与区间数的关系

设 $U=[C,D]$ 是一个正区间数,则按区间数定义有 $C\geqslant 0, D>C$,把此区间数改写成联系数得 $u=C+(D-C)i$,按联系数定义, $i\in[-1,1]$,所以这时的 u 实际上成了一个另一个区间数 $[C-(D-C), C+(D-C)]$,也就是把原区间数的取值范围朝反方向扩大了 1 倍. 如果实际问题不存在这种反向取值的需要,而仍要保持原区间数的取值范围不变,则要说明 $u=C+(D-C)i$ 中的 $i\in[0,1]$. 不过,尽管作出 $i\in[0,1]$ 的限制,$u=C+(D-C)i$ 与 $U=[C,D]$ 仍有一些不同,见表 2.

表 2　区间数 $[C,D]$ 与二元联系数 $u=C+(D-C)i$ 的不同

Table 2　The difference between the interval number $[C,D]$ and binary connection $u=C+(D-C)i$

区间数 $U=[C,D]$	二元联系数 $u=C+(D-C)i$
两端确定,中间不确定.	中间确定,两端不确定.
$D>C$	$C>(D-C)$,也可以是 $C<(D-C)$.
期望值是 $(C+D)/2$	期望值是 C
除了 C 和 D,没有其它关于不确定的信息.	除了 C 和 D,还有 i 的不确定信息: 当 $C>(D-C)$ 时,$i=C/D$(顺势比例取值), 当 $C<(D-C)$ 时,$i=(D-C)/D$(顺势比例取值).

由表 2 可见,二元联系数 $u=C+(D-C)i$ 与区间数 $U=[C,D]$ 不仅形式不同,而且确定与不确定的空间位置还正好相反. 特别是二元联系数 $u=C+(D-C)i$ 中的 i 是一个需要作进一步研究和分析的"待定系数",所以说联系数 $u=C+(D-C)i$ 有着比普通区间数 $U=[C,D]$ 更丰富的关于不确定的信息. 因此,从实际问题出发,是选择用普通区间数 $U=[C,D]$ 还是采用二元联系数 $u=C+(D-C)i$ 表示研究对象或者是研究者主观上的不确定性,应慎重考虑. 另一方面要注意的是,当把普通区间数 $U=[C,D]$ 改写成二元联系数 $u=C+(D-C)i$ 时,会转化隐藏在普通区间数 $U=[C,D]$ 中的某些关于不确定的信息,例如 $U=[C,D]$ 的期望值可以看成是 $(C+D)/2$,但 $u=C+(D-C)i$ 的期望值是 C.

把区间数转换成一个联系数的工作称为区间数的联系数化,这一工作为研究区间数的不确定性提供了新的思路.

2.4　二元联系数与复数的关系

从形式上看,二元联系数与复数相同,研究表明,复数确实可以看作是把实数与虚数联系在一起的一种二元联系数,二元联系数的运算也确实可以应用复数理论和采用复数的一些运算规则,对此可以详见文献[2].

2.5　二元联系数与同异反联系数的关系

历史地看,集对分析最先给出的是同异反联系数 $A+Bi+Cj$,其中:A,B,C 是非负实数,$j=-1, i\in[-1,1]$. 当 $C=0$ 时,就得出二元联系数 $A+Bi$,另一方面,二元联系数 $A+Bi$ 也可以看作是当 $A,B,C\in[0,1]$ 且 $A+B+C=1$ 时,$A+Bi+Cj$ 的一个等价表达;因而当 $A+B<1$ 时立即由 $A+Bi$ 导出 $A+Bi+Cj$. 还有一种情况是通过对二元联系数中 i 的分析导出同异反联系数[19].

3　二元联系数的性质与基本运算

3.1　二元联系数的性质

当 $A,B\in[0,1]$ 且 $A+B=1$ 时,二元联系数 $\mu=A+Bi$ 有以下性质:

性质 1:$i\in[-1,1]$.

性质 2:$\mu\in[-1,1]$.

性质 3:当 $A/B>1$ 时,$\mu>0$.

3.2　普通运算

二元联系数的普通运算基本上等同于普通代数中的多项式运算,只须在乘法运算时注意应用以下规则把计算结果简化,据此可以保证运算结果仍然为形为 $A+Bi$ 的联系数.

$$i=ii=iii=\cdots=i^n, n=1,2,\cdots,k. \quad (1)$$

这是因为不确定性仅相对确定性而言,据此可以在不计不确定性层次的条件下,令不确定数 i 的各次幂与 1 次幂相等.

3.2.1 加法运算

若 $u_1 = A_1 + B_1 i, u_2 = A_2 + B_2 i$，则

$$u = u_1 + u_2 = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i. \quad (2)$$

令 $A_1 + A_2 = A, B_1 + B_2 = B$，则由式(2)得

$$u = A + Bi. \quad (3)$$

若令 $N = A + B$，并用 N 除式(3)两边再令 $\mu = u/N, a = A/N, b = B/N$，就得到归一化的二元联系数

$$\mu = a + bi.$$

由式(3)易知两个二元联系数的和满足交换律，也就是

$$u_1 + u_2 = u_2 + u_1.$$

3 个或更多个二元联系数相加的运算还满足加法结合律：

$$(u_1 + u_3) + u_2 = (u_2 + u_3) + u_1 = u_3 + (u_2 + u_1).$$

3.2.2 n 个二元联系数的平均

记 n 个二元联系数的平均二元联系数为 $\bar{U} = \bar{A} + \bar{B}i$，则有

$$\bar{U} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(A_k + B_k i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} B_k i = \bar{A} + \bar{B}i.$$

3.2.3 减法运算

如果已知 $u = A + Bi$ 是二元联系数 u_1 与 u_2 的和与其中的一个二元联系数 $u_1 = A_1 + B_1 i$，要求另一个二元联系数 u_2，这时有减法运算：

$$u_2 = u - u_1 = (A - A_1) + (B - B_1)i = A_2 + B_2 i.$$

其中：

$$A - A_1 = A_2, B - B_1 = B_2.$$

这里：

$$0 - u = (0 + 0i) - (A + Bi) = (0 - A) + (0i - Bi) = -A - Bi \quad (4)$$

在式(4)中，由于 i 在[-1,1]区间取值不确定，因此，对 $-Bi$ 来说，在 $i = 1$ 时，$-Bi = -B$，在 $i = -1$ 时，$-Bi = B$. 同理，对 Bi 来说，在 $i = 1$ 时，$Bi = B$，在 $i = -1$ 时，$Bi = -B$. 由此可见，无论对 $-Bi$，还是对 Bi，其取值区间都是[$-B, B$]，于是 $-Bi = Bi$，式(4)也因此可以写成：

$$0 - u = (0 + 0i) - (A + Bi) = -A + Bi. \quad (5)$$

式(4)和式(5)表明在二元联系数的减法运算中，一个二元联系数的确定量加上一个不确定量与这个二元联系数的确定量减去一个不确定量在结果上是相同的. 这一点从不确定量的不确定性上得到解释，因为既然是不确定量，并且在[$-B, B$]区间波动，减去不确定量与加上不确定量是等价的. 因此，在计及不确定性情况下，一个联系数减去自身，并不一定等于零，一般的结果是不确定，记为

$$u - u = (A + Bi) - (A + Bi) = 0 + (B, B)\ i = Bi.$$

由此看出不确定量的运算与常量运算或变量运算的不同之处.

3.2.4 乘法运算

设二元联系数 $u_1 = A_1 + B_1 i, u_2 = A_2 + B_2 i$，$u_1$ 与 u_2 的乘积为 u：

$$u = u_1 u_2 = A_1 A_2 + A_1 B_2 i + A_2 B_1 i + B_1 i B_2 i. \quad (6)$$

引进式(1)后，可简化式(6)得

$$u = u_1 u_2 = A_1 A_2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1 + B_1 B_2)i. \quad (7)$$

式(7)也称为二元联系数乘法公式.

根据式(7)可以得到二元联系数的平方公式为

$$(A + Bi)^2 = A^2 + (2AB + B^2)\ i. \quad (8)$$

二元联系数乘法与加法的混合运算满足

交换律： $u_1 u_2 = u_2 u_1$，

结合律： $u_1(u_2 u_3) = (u_1 u_2) u_3$，

分配律： $u_1(u_2 + u_3) = u_1 u_2 + u_1 u_3$.

3.2.5 除法运算

二元联系数的除法运算是二元联系数乘法运算的逆运算.

设二元联系数 $u = A + Bi$ 除 $u_1 = A_1 + B_1 i$ 的商为 $u_2 = A_2 + B_2 i$，则因为有 $u_1 u_2 = A_1 A_2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1 + B_1 B_2) i = A + Bi$，比较等式两边得

$$A_1 A_2 = A, \quad (9)$$

$$A_1 B_2 + A_2 B_1 + B_1 B_2 = B. \quad (10)$$

解方程(9)与(10)得

$$A_2 = A/A_1,$$

$$B_2 = (B - AB_1/A_1)/(A_1 + B_1).$$

由此得两个二元联系数的除法公式：

$$(A + Bi)/(A_1 + B_1 i) = A/A_1 + (B - AB_1/A_1) i/(A_1 + B_1).$$

要指出的是，黄德才等人还结合不确定性网络计划问题研究，对二元联系数的乘法和除法给出另外的

定义,请参见文献[3].

3.2.6　*开方根运算*

设二元联系数 A_0+B_0i 的平方根 $\sqrt{A_0+B_0i}=A+Bi$,则由前述的二元联系数平方公式(8)可得

$$A_0=A^2,$$

$$B_0=2AB+B^2,$$

于是得

$$A=\sqrt{A_0},$$

$$B=-\sqrt{A_0}\pm\sqrt{A_0+B_0}.$$

从而得二元联系数 A_0+B_0i 的平方根计算公式:

$$\sqrt{A_0+B_0i}=\sqrt{A_0}+[-\sqrt{A_0}\pm\sqrt{A_0+B_0}]i.$$

3.3　二元联系数的的几何运算

由于二元联系数 $u=A+Bi$ 与一对实数 A、B 相对应,所以在不计及 i 的值时,可以用直角平面坐标系中从原点 O 指向 U 的向量表示(见图 3).

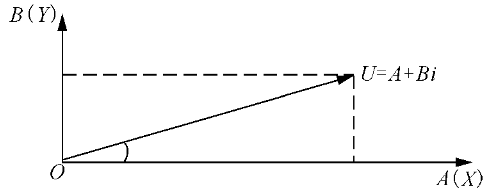

图 3　二元联系数 $A+Bi$ 的向量表示

Fig. 3　The binary connection number $A+Bi$ vector representation

向量 $\boldsymbol{OU}$ 的长度 γ 也称为二元联系数的模,记为

$$|u|=\gamma=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A^2+B^2}.$$

在 $|u|\neq 0$ 的情况下,表示 u 的向量与 X 轴的交角 θ 为联系数 u 的辐角,记作:

$$\arg u=\theta.$$

从图 3 可知:

$$\tan(\arg u)=y/x=B/A.$$

二元联系数 $A+Bi$ 的模的实质是同时计及确定量 A,不确定量 B 以及确定量与不确定量相互作用后的效果值.

由于二元联系数的向量表示及其模与辐角的计算能反映出确定量与不确定量的相互作用效果,如何计算两个二元联系数相乘结果中的确定量与不确定量的相互作用效果就成为需要进一步研究的问题,为此,下面介绍二元联系数 $A+Bi$ 的三角函数表示与应用.

利用直角坐标系与坐标系的数学关系式 $x=\gamma\cos\theta, y=\gamma\sin\theta$,得二元联系数 $u=A+Bi$ 的三角函数表示式:

$$u=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta).$$

从而得到用三角函数表示的两个二元联系数的乘法运算公式:

$$u_1u_2=\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\gamma_1\gamma_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.$$

从而有

$$|u_1u_2|=|u_1|\cdot|u_2|,$$

$$\arg(u_1u_2)=\arg u_1+\arg u_2.$$

也就是说:两个用三角函数表示的二元联系数 $A+Bi$ 相乘,结果仍是形如 $A+Bi$ 的二元联系数,且乘积的模等于这两个二元联系数模的乘积,乘积的辐角等于它们辐角的和.

4　应用举例

4.1　在自然语言表述中的应用

"……左右"之类的自然语言可以用二元联系数 $A+Bi$ 表示,例如我大约下午 3 时左右回家,可以记为 $3+1i$ 时左右回家;筑路这项工程大约 20 天左右完成,这个 20 天左右可记为 $20+6i$,如此等等. 仔细看,这些表示"……左右"之类的自然语言二元联系数有一个一般的规律:$A>B$. 这也容易理解,因为从语义上说,"……左右"的含义相当于"……附近",不会离"……"太远.

4.2　在自动推理中的应用

著名人工智能专家傅京孙、蔡自兴、徐光佑在《人工智能及其应用》一书中举过这样的例子[20]. 如果有以下规则:如果启动器发出刺耳噪声,那么,这是坏启动器的可能性是 0.75;按概率论,上述规则自动地意味着存在另一条以下规则:如果启动器发出刺耳噪声,那么,这是好启动器的可能性是 0.25,但在许多场合,专家并不接受这样的规则.

现在把以上规则联系数化,得:如果启动器发出刺耳噪声,那么,这是坏启动器的可能性是 $0.75+0.25i$;按集对论,上述规则自动地意味着存在另一条以下规则:如果启动器发出刺耳噪声,那么,这是好启动器的可能性是 $0.25+0.75i$,但由于当 i 在 $[-1,1]$ 区间取值时,$0.75+0.25i$ 的值在 $[0.5,1]$ 区间,下端点 0.5 是坏启动器与好启动器的临界点. 而 $0.25+$

$0.75i$的值在$[-0.5,1]$区间，其反向推理结果显示有可能否定是好启动器. 在综合这两个方面后得出的推理结果应当是，虽然启动器发出刺耳噪声，但还不能断定这是好启动器还是坏启动器. 显然，在许多场合，专家可以接受上述联系数化了的规则.

4.3 在测量不确定度评定中的应用

对测量数据作不确定度评定的要求，最早由国际标准化组织(ISO)1993 年提出，为与国际接轨，中国国家质量技术监督局于 1999 年颁布了《测量不确定度评定与表示》(JJF1059-1999). 但这两个标准所要求的都是对测量数据作出统计结果时要给出结果的不确定度表示，并不要求对每个测量数据都有不确定度表示. 但实际测量情况是每个测量数据都因测量仪器、测量环境、测量过程等因素的影响存在不确定度，测量结果的不确定度是每个测量数据不确定度的总体反映；从这一认识出发，文献[7]给出了计及每个测量数据不确定度的测量结果不确定度计算新算法. 其实质性工作，就是把每个测量数据都用二元联系数 $A+Bi$ 表示，其中的 A 是读数，Bi 是 A 的不确定度，在此基础上再通过统计处理 N 个二元联系数得到测量结果. 显然，这样得到的测量结果仍然是形如 $A+Bi$ 形式的二元联系数，其中的 Bi 这部分相当于标准所要求给出的测量不确定度. 需要进一步研究的问题是，国际和国家标准中的原始测量数据以“定值”形式出现，文献[7]的工作是一开始就把原始测量数据联系数化了，也就是原始测量数据就以“定值 + 不确定度”的形式出现，到底哪种方法更合理？是一个有待深入研究的课题，因为前者毕竟是标准与计量方面的最高权威机构给出的规定，后者是一种学术探讨. 此外，文献[9]也把二元联系数应用于大学物理实验空气比容比热测定不确定度近似计算方法的改进.

4.4 在相关分析中的应用

相关分析是研究两个变量 x 与 y 关系的一种常用数理统计方法，通过计算这两个变量的相关系数 $R\in[-1,1]$，再根据 R 的大小来判定 x 与 y 是正相关($R>1$)，负相关($R<1$)还是不相关($R=0$). 但传统数理统计理论没有提出也没有回答相关系数 R 的补数 $1-R$ 的含义是什么？集对分析提出并回答了这个问题，认为补数 $1-R$ 在一般情况下具有不确定性，所以应把相关系数 R 联系数化为 $R+(1-R)i$，$i\in[-1,1]$，同时对 i 的取值展开分析，从而充分地利用了补数 $(1-R)i$ 所带有的有价值的信息，这方面的工作可以参见文献[21-23]. 研究表明，这是非常有意义的一项工作，因为这样一来，让我们看到表面上已达到一定程度正相关(负相关)的两个变量 x 与 y，其实际情况可能恰恰相反，是负相关(正相关)，或者是相关不相关不能确定. 例如当 $R(x,y)=0.5$ 时，看上去 x 与 y 这两个变量是正相关无疑，其实，其联系数化后的相关系数是 $0.5+(1-0.5)i$，当 $i=0$ 时，$0.5+(1-0.5)i=0$，说明在“最坏情况”下，还不能确定所讨论的这两个变量是相关还是不相关；又如当 $R(x,y)=0.4$ 时，联系数化后，有可能使 $R(x,y)$ 的值为 -0.2，说明 x 与 y 的关系有可能是负相关关系. 依次类推，可知只有当$R(x,y)=0.8$时，才能保证 x 与 y 是正相关关系，因为即使其补数 0.2 取负值冲销 0.8，仍有 0.6 程度的正相关. 这或许就是人们在日常生活和工作中通常认为“逢 8 才发”的一个理由.

4.5 在群体智能测算建模中的应用

在由 n 个人组成的群体中，每个个体能发挥的智能不仅受其自身智能的影响，还受其他个体的影响，如启发、激励、合作、协同、嫉妒、排斥、压制等，具体是何种影响具有不确定性. 因此，为不失一般性，设个体自身的智能是 1(1 个智能单位)，其他每个个体对该个体智能发挥的影响设为 i，则单个个体在由 n 个人组成的群体中能实际产生的智能是 $1+(n-1)i$，n 个人组成的群体智能是 $n[1+(n-1)i]=n+(n^2-n)i=n+n^2i-ni$，当 $i=1$ 时，$n+n^2i-ni=n^2$(n^2 个智能单位). 这说明在最好状况下，群体智能是个体智能之和的二次方幂(放大)，从一个侧面说明了通常情况下群体的智能大大大于个体的智能. 当 $i=-1$ 时，$n+n^2i-ni=2n-n^2$，对该式求关于 n 的导数并令其等于零，得 $2-2n=0$，解得 $n=1$，这又从一个侧面说明了群体智能在最不理想协同情况下，群体智能不如个体智能. 这个数学模型在一定的意义上，从数学角度解释了我国改革开放以来，我国社会中个体户大量涌现这一社会现象，就是最大限度地发挥单个人的智能，创造社会财富，推动社会发展；但在一些特大型社会活动和科研项目中，如抗震救灾、载人航天飞行等等，则需要有高度有序协作的群体来最大限度地发挥群体智能. 显然，本问

题中当 $n=3$ 时,就是所谓的"三个和尚没水喝($1+1+1<3$)"与"三个皮匠抵个诸葛亮($1+1+1>3$)"的群体智能数学模型[2].

5 结束语

涂序彦教授为《集对分析及其初步应用》一书所作的序中指出:"世界是确定性与不确定性的矛盾统一体.各种系统、各种事物,在某种条件下,某种层次上体现出不确定性;而在另一种条件下,另一种层次上,体现出确定性,因此,如何运用对立统一的观点,从整体和全局上研究确定性与不确定性,是有待探讨的重要问题".存在决定意识,问题决定方法.集对分析正是从整体和全局上处理确定性与不确定性关系的一种新的系统数学理论.二元联系数是其中的一个重要数学工具,虽然对二元联系数已有一些研究和实际应用;但还有不少需要深入研究的问题,特别是需要进一步具体地研究 $A+Bi$ 中 i 的取值规律,作者猜想,i 的取值在不同的专业问题中或许应当有不同的规律.又如,是否可以以二元联系数为纽带,把复数、模糊集、概率论联系起来整合成一个处理多种不确定性问题的新理论,既促进这些数学分支各自的发展,也为人工智能处理各种不确定性问题提供统一的理论和方法.

参考文献:

[1]赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州:浙江科技出版社, 2000.

[2]赵克勤. 集对分析的不确定性理论在 AI 中的应用[J]. 智能系统学报,2006,1(2):16-25.
ZHAO keqin. The application of uncertainty systems theory of set pair analysis(SPU) in the artificial intelligence [J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems,2006,1(2):16-25.

[3]黄德才,赵克勤. 用联系数描述和处理网络计划中的不确定性[J]. 系统工程学报,1999,14(2):112-117.
HUANG Decai,ZHAO Keqin. Using the connection number of the SPA to express and process the uncertainties in network planning[J]. Journal of System Engineering, 1999,14(2):112-117.

[4]高淑萍,刘三阳. 基于联系数的多资源应急系统调度问题[J]. 系统工程理论与实践,2003,23(6):113-115.
GAO Shuping,LIU Sanyang. Scheduling problem in multi-resource emergency systems based on the connection number [J]. Systems Engineering-Theory & Practice,2003,23(6):113-115.

[5]郭瑞林,杨春玲. 小麦品种区域试验的同异分析方法研究[J]. 麦类作物学报,2001,21(3):60-63.
GUO Ruilin,YANG Chunling. Study on identical and different analysis method of wheat variety regional test[J]. Acta Triticeae Crops,2001,21(3):60-63.

[6]金华征,程浩忠,杨晓梅,等. 基于联系数模型的电网灵活规划方法[J]. 中国电机工程学报, 2006,26(12):16-20.
JIN Huazheng, CHENG Haozhong, YANG Xiaomei, et al. Transmission network flexible planning based on connection number model [J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(12):16-20.

[7]张清河, 王全凤. 基于联系数的钢筋抗拉强度测量不确定度评定新方法[J]. 数学的实践与认识,2006,36(10):105-109.
ZHANG Qinghe,WANG Quanfeng. A new method of evaluation of measurement uncertainty for steel bar tensile strength based on connection number[J]. Mathematics in Practice and Theory,2006,36(10): 105-109.

[8]张清河. 基于联系数的预先危险性分析技术与应用[J]. 数学的实践与认识,2005,35(3):165-170.
ZHANG Qinghe. A new technology and its apply of preliminary hazard analysis considering of uncertainty[J]. Mathematics in Practice and Theory,2005,35(3):165-170.

[9]宋向炯. 基于联系数的空气比热容比实验不确定度近似算法改进[J]. 大学物理实验,2006,19(4):58-64.
SONG Xiangjiong. The improvement of calculating of uncertainty on air specific heat ratio experiment based on connection number[J]. Physical Experiment of College,2006,19(4):58-64.

[10]吴　亭. 二维联系数及其应用[J]. 闽江学院学报,2006,27(5):14-18.
WU Ting. On two dimension coefficient and it's application [J]. Journal of Minjiang University,2006,27(5):14-18.

[11]杨继荣. 尺寸链求解的集对分析方法研究与应用[J]. 机械传动,2006,30(1):25-26.
YANG Jirong. Solving method of dimension chain based on SPA and its application[J]. Journal of Mechanical Transmission[J]. 2006,30(1):25-26.

[12]王　霞. 基于复数理论的同异型联系数及其应用[J]. 数学的实践与认识,2005,35(8):127-132.
WANG Xia. Identical-different connection number and its applications based on complex number theory[J]. Mathe-

matics in Practice and Theory, 2005,35(8):127-132.
[13]王 霞. 观察数据用联系数表示的方差分析及应用[J]. 天津科技大学学报,2007,22(3):72-75.
WANG Xia. The square difference analysis and application using connection number indicates in observation data[J]. Journal of Tianjin University of Science & Technology, 2007,22(3):72-75 .
[14]汪新凡. 基于联系数的区间型多属性决策方法研究[J]. 西安理工大学学报,2007,23(1):102-105.
WANG Xinfan. Interval multi-attribute decision making method based on connection number [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2007,23(1):102-105.
[15]ISO. Guide to the expression of uncertainty in measurement [M]. Switzerland:ISO,1993.
[16]中国国家质量技术监督局. 测量不确定度评定与表示(JJF1059—1999)[M]. 北京:中国计量出版社,1999.
[17]程极泰. 集合论[M]. 北京:国防工业出版社,1985.
[18]赵克勤. 成对原理及其在集对分析(SPA)中的作用与意义[J]. 大自然探索,1998,17(4):90.
ZHAO Keqin. The function and meaning of pair principle in the set pair analysis (SPA)[J]. Exploration of Nature, 1998,17(4):90.
[19]赵克勤,张清河. 联系数中确定性与不确定性的分析[C]//中国人工智能进展2005. 北京:北京邮电大学出版社,2005:864-867.
ZHAO Keqin, ZHANG Qinghe. Analysis of certainty and uncertainty in connection number[C]//Progress of Artificial Intelligence in China (2005). Beijing:Beijing University of Posts and Telecommunications (BUPT) Publishing House, 2005:864-867.
[20]蔡自兴,徐光佑. 人工智能及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2003.
[21]余国祥. 基于SPA的学生成绩相关性研究[J]. 浙江师范大学学报:自然科学版,1997,20(3):37- 41.
YU Guoxiang. A study of relatedness of students achievement based on SPA[J]. Journal of Zhejiang Normal University:Natural Sciences,1997,20(3):37- 41.
[22]阮玲霞. 大学生身体机能提高的有效途径[J]. 体育学刊,2002,9(2):41- 43.
RUAN Lingxia. Effective ways of improving the body's functions of college students[J]. Journal of Physical Education,2002,9(2):41- 43.
[23]郭瑞林, 同异反灰色相关分析方法及其在小麦中的应用[J]. 农业系统科学与综合研究,2005,21(3):170-174.
GUO Ruilin. Identical-discrepant-contrary grey correlation analysis method and its application in wheat [J]. System Sciences and Comprehensive Studies in Agriculture,2005, 21(3):170-174.

作者简介:

赵克勤,男,1950年生,研究员,中国人工智能学会理事,人工智能基础专业委员会副主任,集对分析联系数学专业筹备委员会主任,主要研究方向为联系数学,1989年提出集对分析(联系数学),发表论文80余篇,出版专著1部.