第38卷第23期 数学的实践与认识 Vol. 38 No. 23
2008年12月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Decem., 2008

基于联系数复运算的区间数多属性决策方法及应用

刘秀梅[1]， 赵克勤[2]

(1. 连云港师范高等专科学校 数学系，江苏 连云港 222006)
(2. 浙江诸暨联系数学研究所，浙江 诸暨 311811)

摘要： 针对属性权重与属性值都为区间数的多属性决策问题，先把区间数转换成 $a+bi$ 形式的联系数，再按联系数的复运算要求改写成三角函数表达式，在此基础上得到一种多属性加权决策综合主值模型. 实例应用表明：该方法在一定程度上客观地反映出区间数多属性决策问题中确定性与不确定性的相互联系和相互影响，算法简便，结论可靠.

关键词： 区间数；多属性决策；联系数 $a+bi$；三角函数表达式；复运算

1 引 言

区间数多属性决策是一种常见的不确定性决策问题，原因是区间数能较为客观地表示人们对事物既确定又不确定的辩证认识，但也因此给具体的决策带来麻烦，因为区间数不能象点实数那样方便地作出排序和开展运算. 区间数多属性决策问题因而成为决策科学研究人员关注的热点之一. 例如文[1]根据不确定性多属性决策特点给出区间数的一种排序方法；文[2]对属性权重值为点实数，属性指标值为区间数的多指标决策进行研究；文[3]研究属性指标权重与属性指标值都是区间数的多属性决策问题，给出了区间数多指标决策问题的TOPSIS法；文[4]给出属性值和属性权重都为区间数的变权综合决策方法；文献[5]把集对分析引入到区间数多属性决策，给出了一种基于集对分析的区间数多属性决策方法，其特点是把区间数转换成同异反三元联系数，再根据三元联系数的势作出综合决策；文献[6]给出了基于同异反三元联系数的多属性决策TOPSIS法.

本文在文献[5-6]工作思路的基础上，进一步探讨集对分析联系数在区间数多属性决策问题中的应用，首先指出区间数可以转换成 $a+bi$ 形式的联系数，再参照联系数 $a+bi$ 的复数运算要求，将 $a+bi$ 改写成三角函数表达式，进而建立区间数多属性加权综合决策模型，并用一个实例说明这种模型的有效性和优越性.

2 区间数多属性决策问题

2.1 区间数

记 R 为实数域，称闭区间 $[x^-,x^+]$ 为区间数，记为 $\tilde{x}=[x^-,x^+]$，其中 $x^-\in R$，$x^+\in R$，$x^-\leq x^+$，当 $x^-=x^+$ 时，$\tilde{x}$ 就退化为点实数.

收稿日期： 2008-06-22

基金项目： 江苏省现代教育技术"十一五"规划2008年滚动课题(2008-R-6979)；连云港师范高等专科学校2007年校级团队招标课题(LYGSZTD2007-04)；连云港师范高等专科学校2007年校级教改课题(2007-09)

2.2 区间数多属性决策问题

设有 m 个方案：$S_1,S_2,\cdots,S_m$ 组成方案集 S；每个方案各有 n 个属性：$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$，组成属性集 Q；n 个属性的权重向量区间数为 $\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n$ 组成权重向量集 $\tilde{W}$，其中 $\tilde{w}_t=[w_t^-,w_t^+]$，$0\le w_t^-\le w_t^+\le 1$，$t=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{t=1}^{n}w_t^-\le 1$，$\sum_{t=1}^{n}w_t^+\ge 1$；$\tilde{P}=(\tilde{p}_{kt})_{m\times n}$ 表示区间数决策矩阵，其中 $\tilde{p}_{kt}$ 表示第 k 个方案在 t 个属性上的评价值，并假定 $\tilde{p}_{kt}$ 已通过规范化处理为越大越好型属性，且 $\tilde{p}_{kt}\in[0,1]$，$k=1,2,\cdots,m$，$t=1,2,\cdots,n$.

要求对 m 个方案确定出最优方案，同时对这些方案作出排序.

3 联系数 $a+bi$ 及其复运算

3.1 联系数 $a+bi$ 简介

联系数是赵克勤在集对分析中给出的一个数学工具[7]，主要用于刻画和分析事物的同异反确定与不确定联系，已在许多领域得到应用[8-9]. 联系数的一般形式是

$$U=A+Bi+Cj \tag{1}$$

其中 $A,B,C\in R^+$，$j=-1$，$i\in[-1,1]$.

令 $N=A+B+C$，$\mu=U/N$，$a=A/N$，$b=B/N$，$c=C/N$，则得联系数

$$\mu=a+bi+cj \tag{2}$$

因(2)式有 $a+b+c=1$，$a,b,c\in[0,1]$ 约束，所以由(2)式得到联系数的一些表达式：

$$U=A+Bi,\mu=a+bi \tag{3}$$

$$U=A+Cj,\mu=a+cj \tag{4}$$

$$U=Bi+Cj,\mu=bi+cj \tag{5}$$

其中(3)式又称为确定不确定联系数，意指 A(或 a) 与 B(或 b) 确定后，i 仍是一个待进一步确定的数；也称为同异型联系数，其中 A(或 a) 称为同部，B(或 b) 称为异部，$A+Bi$(或 $a+bi$) 联系数也因此称为同异型联系数，因其形式上与复数的表述相同，文献[10]据此给出了基于复数理论的联系数 $a+bi$ 的三角函数表达形式与指数表达式，并给出了相应的转化算法，本文简称其为联系数 $a+bi$ 的复运算.

3.2 联系数 $a+bi$ 的复运算

1) 把联系数 $a+bi$ 改用三角函数式表示为

$$\mu=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{6}$$

(6)式中的

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \tag{7}$$

称为联系数 $a+bi$ 的模，用 $|\mu|$ 表示.

$$\theta=\arctan\frac{b}{a} \tag{8}$$

称为联系数 $a+bi$ 的幅角.

但要注意(6)式中的 i 与复数理论中的 i 含义不同，值域不同，这里的 $i\in[-1,1]$.

2) 用三角函数表达的联系数的乘法运算

类似于复数的乘法运算，定义联系数的乘法运算：

设有联系数 $\mu_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 和 $\mu_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，则有

$$\begin{aligned}\mu_1\mu_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_1) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]\end{aligned}$$

由此得

$$|\mu_1\mu_2| = |\mu_1||\mu_2| \tag{9}$$

$$\arg(\mu_1\mu_2) = \arg\mu_1 + \arg\mu_2 \tag{10}$$

(9)(10)两式说明两个用三角函数表示的联系数相乘，其结果仍然是 $a + bi$ 型联系数，且乘积的模等于这两个联系数模的乘积，乘积的幅角等于这两个联系数幅角的和.

4　区间数的转换

4.1　转换成 $a+bi$ 形式的联系数

设有区间数 $\tilde{x} = [x^-, x^+]$，其中 $x^-, x^+ \in [0,1]$，联系数 $\mu = a + bi, a, b \in [0,1], i \in [-1,1]$，则令

$$a = x^- \tag{11}$$

$$b = x^+ - x^- \tag{12}$$

则称(11)、(12)是对区间数 $\tilde{x}$ 向联系数 $a + bi$ 的一个转换. 注意到按照联系数的定义 $i \in [-1,1]$，因此经(11)、(12)式转换后，该联系数取值范围是 $[a - b, a + b]$，当 i 在$[-1,1]$的子区间$[0,1]$取值时，$\tilde{x}$ 与 $\mu = a + bi$ 等价.

4.2　转换成三角函数

在得到区间数 $\tilde{x}$ 的联系数 μ 的转换后，再利用3.2节中的(6)、(7)、(8)式，将区间数 $\tilde{x}$ 最终转换成三角函数表达式，于是有

$$\tilde{x} = [x^-, x^+] = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{13}$$

其中

$$r = \sqrt{(x^-)^2 + (x^+ - x^-)^2} \tag{14}$$

$$\theta = \arctan\frac{x^+ - x^-}{x^-} \tag{15}$$

称(13)、(14)、(15)为将区间数 $\tilde{x}$ 经联系数 $a + bi$ 转换成三角函数表达式的转换公式.

5　基于联系数复运算的区间数多属性决策模型

5.1　基本模型

设方案集 S 的各方案 $S_k(k = 1,2,\cdots,m)$ 的各属性 $Q_t(t = 1,2,\cdots,n)$ 经规范化处理后的评价值 $\tilde{p}_{kt} \in [0,1]$ 的加权综合结果为 $M(S_k)$，则有

$$M(S_k) = \sum_{t=1}^{n}\tilde{w}_t\tilde{p}_{kt} \tag{16}$$

5.2 一般模型

把(11)式中的权重区间数 $\tilde{w}_t$ 与评价值 $\tilde{p}_{kt}$ 各自经联系数 $a+bi$ 形式的转换，再转换成三角函数表达式，即得到

$$M(S_k)=\sum_{t=1}^{n} r_{w_t} r_{p_{kt}}[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})] \tag{17}$$

此模型称为一般综合值模型，简称一般模型，计算得到的值称为一般综合值.

5.3 主值模型

当(17)式中的 $[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})]=1$ 时，则得

$$M(S_k)=\sum_{t=1}^{n} r_{w_t} r_{p_{kt}} \tag{18}$$

称(18)式为基于联系数复运算的区间数多属性决策综合主值模型，简称综合主值模型或主值模型.其值称为综合主值，简称主值.由于综合主值模型计算简便，所以应用时，可以先计算各方案的综合主值，综合主值大的优先于综合主值小的；如有必要，进一步按(17)式计算一般综合值.

其中，i 可以按不同情况取值，如按比例取值，取

$$i=\frac{\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})}{\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})}$$

或在定义域 $i\in[-1,1]$ 中取特殊值 $i=0.5,-0.5,0,-1,1$ 等开展讨论与分析.

6 实 例

为了说明上述模型的有效性，这里采用文献[2]中给出的例子做计算和分析.

考虑一般大学的5个学院 (S_1,S_2,S_3,S_4,S_5) 的综合评估问题，假定采用教学、科研和服务三个属性作为评估指标，各属性的权重和决策矩阵见表1和表2，试做出综合评估和排序.

表1 属性权重

教学 Q_1	科研 Q_2	服务 Q_3
[0.3350,0.3755]	[0.3009,0.3138]	[0.3194,0.3363]

表2 5个学院的区间数决策矩阵

	教学 Q_1	科研 Q_2	服务 Q_3
方案 S_1	[0.214,0.220]	[0.166,0.178]	[0.184,0.190]
方案 S_2	[0.206,0.225]	[0.220,0.229]	[0.182,0.191]
方案 S_3	[0.195,0.204]	[0.192,0.198]	[0.220,0.231]
方案 S_4	[0.181,0.190]	[0.195,0.205]	[0.185,0.195]
方案 S_5	[0.175,0.184]	[0.193,0.201]	[0.201,0.211]

由表2，根据(14)式区间数模的计算公式，以第1行第1列数据为例：

$$r_{p_{11}}=\sqrt{(x^-)^2+(x^+-x^-)^2}=\sqrt{(0.214)^2+(0.220-0.214)^2}$$

$=0.214084$（保留小数点后 6 位，以下同）

其余各数据算法相同，得 5 个学院的决策"模"矩阵（表 3）.

表 3　5 个学院的决策"模"矩阵

$$(r_{p_{kt}})_{5\times 3}=\begin{bmatrix}0.211084 & 0.166433 & 0.184098\\ 0.206874 & 0.220184 & 0.182222\\ 0.195208 & 0.192094 & 0.220275\\ 0.181224 & 0.195256 & 0.185270\\ 0.175231 & 0.193166 & 0.201249\end{bmatrix}$$

由表 1，根据区间数模的计算公式，得各属性 $Q_t(t=1,2,3)$ 权重的"模"为 $r_{w_1}=0.337439$，$r_{w_2}=0.301176$，$r_{w_3}=0.319847$，由公式(18)$M(S_k)=\sum_{t=1}^{n} r_{w_t} r_{p_{kt}}$ 进行加权计算，以下表中的第 1 行第 1 列数据为例：

$$r_{w_1} r_{p_{11}}=0.337439\times 0.214084=0.072240$$

其余数据计算类似，得到的"模"决策矩阵为

$$\begin{array}{c}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\end{array}\begin{bmatrix}0.072240 & 0.050126 & 0.058883\\ 0.069808 & 0.066314 & 0.058283\\ 0.065871 & 0.057854 & 0.070454\\ 0.061152 & 0.058806 & 0.059258\\ 0.059130 & 0.058177 & 0.064369\end{bmatrix}\begin{array}{c}0.181249\\0.194405\\0.194179\\0.179216\\0.181676\end{array}$$

上面矩阵中最右边一列为综合主值 $M(S_k)(k=1,2,3,4,5)$ 的值，将此排序，得到 $S_2\succ S_3\succ S_5\succ S_1\succ S_4$，（$\succ$表示优于）这一结论与文献[1,2,5]结论一致.

进一步按(17)式的一般模型综合值公式计算 $M(S_k)$，

$$M(S_k)=\sum_{t=1}^{n} r_{w_t} r_{p_{kt}}[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})]$$

分别取 $i=-0.5$，$i=0$，$i=0.5$，计算一般模型综合值，并排序，得到的结果见表 4. 为便于比较，按主值的排序也列在表 4.

以第 1 行第 1 列数据为例，计算步骤如下：

第一步：根据(15)式 $\theta=\arctan\dfrac{x^+-x^-}{x^-}$，计算

$$\theta_{w_1}=\arctan\frac{0.3755-0.3350}{0.3350}=0.12031164$$

$$\theta_{p_{11}}=\arctan\frac{0.220-0.214}{0.214}=0.02803004$$

第二步：取 $i=-0.5$，根据$[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})]$，计算

$$[\cos(\theta_{w_1}+\theta_{p_{11}})+i\sin(\theta_{w_1}+\theta_{p_{11}})]$$
$$=\cos(0.12031164+0.02803004)-0.5\sin(0.12031164+0.02803004)$$
$$=0.915118$$

第三步：根据 $r_{w_t} r_{p_{kt}}[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{kt}})]$，计算

$r_{w_1} r_{p_{11}}[\cos(\theta_{w_1}+\theta_{p_{11}})+i\sin(\theta_{w_1}+\theta_{p_{11}})]=0.072240\times 0.915118=0.066109$

类似可得当 $t=2$ 时值为 0.046918 和 $t=3$ 时值为 0.056155.

第四步：根据(17)式一般模型综合值公式计算 $M(S_k)$.

$$M(S_1)=\sum_{t=1}^{3} r_{w_t} r_{p_{1t}}[\cos(\theta_{w_t}+\theta_{p_{1t}})+i\sin(\theta_{w_t}+\theta_{p_{1t}})]$$

$$=0.066109+0.046918+0.056155=0.169182$$

当 $i=0$ 和 $i=0.5$ 时，同理可计算出如下数据.

将取 $i=-0.5$，$i=0$，$i=0.5$ 的3 个一般综合值和综合主值取平均数，得到最后综合排序(第 5 列数据).

表4　5 个学院的一般综合值排序及与综合主值排序比较

	$i=-0.5$ 排序	$i=0$ 排序	$i=0.5$ 排序	综合主值排序	最后综合排序
S_1	0.169182①	0.17991(1)	0.190637(1)	0.181249(1)	0.180245①
S_2	0.1792199②	0.192301②	0.205403(1)	0.194405①	0.192827②
S_3	0.181525①	0.192738①	0.203951②	0.194179②	0.193098①
S_4	0.166642⑤	0.177737⑤	0.188832⑤	0.179216⑤	0.178107⑤
S_5	0.169466③	0.180261③	0.191056③	0.181676③	0.180615③

由表4 可见，按综合主值大小排序与按一般综合值结合 i 的不同值排序有所不同，其中 S_2 在综合主值排序与按一般综合值且取 $i=0.5$ 时的排序相同，都是第1 位，但在一般综合值且 i 取0 和 i 取 -0.5 时，S_2 的排序第2.

7 讨　　论

1) 本文所举实例在文献[1,2,5]中分别采用区间数排序和集对分析三元联系数处理，所得结果都相同，本文采用"主值模型"得到的结果也与以上文献所得结果一致，从一个侧面说明了把区间数经联系数 $a+bi$ 这个中介转化为三角函数表达式进行决策是一条可行的思路.

2) 从数学哲学的角度看，区间数 $\tilde{x}=[x^-,x^+]$ 是确定性与不确定性的辩证统一. 确定性是指 x^-，x^+ 是两个确定的界限，不确定性是指 x 在 $[x^-,x^+]$ 区间具体取何值具有不确定性，而这两者又是相互联系着的. 从数学计算的角度看，(18)式所示的"主值模型"主要是把区间数 $\tilde{x}=[x^-,x^+]$ 所表达的确定性测度 $a=x^-$ 与不确定性测度 $b=x^+-x^-$ 用"几何平均"的形式有机地联系起来. 这是利用"主值模型"能取得与其它方法同样决策结果的一个内在原因.

3) 但是另一方面，$a(=x^-)$ 与 $b(=x^+-x^-)$ 之间还有一个"比值关系"，这个"比值关系"与前述的"几何平均关系"一样，也是客观反映区间数 $\tilde{x}=[x^-,x^+]$ 确定性与不确定性相互联系、相互影响的一个侧面，把这两种关系联系起来作系统性考虑同样是必要的，(17)式所示的"一般模型"就是把这两种关系作系统性考虑的一种具体体现.

4) 需要注意的是：区间数 $\tilde{x}=[x^-,x^+]$ 中的确定性与不确定性相互联系、相互影响还具有"随机性"，也就是区间数有可能取给定区间中的某个值的不确定性，对此"随机性"，则由"一般模型"中的"i"承载，当需要考虑这种随机性时，可以通过"i"的取值开展相应分析.

5）显而易见，在一个区间数多属性决策问题中，多个决策对象在确定性与不确定性不同的相互作用条件下所具有的排序不可能完全保持一致，为此在表 4 中分别给出了 $i=-0.5$，$i=0$，$i=0.5$ 时5 个学院的综合排序变化情况，其中 S_1、S_1、S_5 这3 个学院的排序位置在各种情况下都保持不变，说明对这 3 个学院来说，表 2 给出的属性值区间数的不确定性对确定性的作用和影响不仅有限而且微不足道；但对 S_2 与 S_3 来说，表 2 给出的属性值区间数的不确定性对确定性的作用和影响就不能忽略不计，因为在"综合主值排序"与"$i=0.5$"这两种情况下，S_2 排在 S_3 前面；但在 $i=-0.5$，$i=0$ 这两种情况下，S_2 都排到 S_3 后面；这说明，对 S_2 与 S_3 来说，表2 给出的属性值区间数的不确定性对确定性的作用和影响随不同的处理条件而有明显不同，前者可以看成是对表 2 给出的属性值区间数随机地作"偏乐观"或"偏大"取值的排序结果；后者可以看成是随机地作"偏悲观"或"偏小"取值的排序结果.

面对不同条件下的不同排序结果，如果需要在一般意义上综合考虑属性值区间数的不确定性对确定性的作用和影响，这时只有作数学期望意义上的取平均值考虑，以作出最后的综合排序决策；表4 显示，这时 S_3 排在 S_2 的前面. 结合表2 给出的属性值区间数看，一个直观的原因是 S_3 在 3 个属性上的区间数的不确定性测度之和为 $(0.204-0.195)+(0.198-0.192)+(0.231-0.220)=0.026$，要明显地小于 S_2 在3 个属性上的区间数的不确定性测度之和 $(0.225-0.206)+(0.229-0.220)+(0.191-0.182)=0.037$.

8 结　　语

区间数多属性决策问题说到底是一种不确定性决策问题，其不确定性主要来自区间数本身；尽管区间数同时也有着其确定的一面，例如上下界，区间数也因此具有确定——不确定的性质. 鉴于区间数的这种性质，对于区间数多属性决策，显然不能从完全确定的角度作出决策和排序，而必须同时分析其在不确定性条件下的决策排序，重点是考虑不确定性对于确定性的作用以及对排序决策的影响. 通过把区间数经联系数 $a+bi$ 为中介转化为三角函数表达式后，在一定程度上体现出区间数不确定性对确定性所产生的作用和影响，在此基础上作出最后综合排序决策，有助于提高区间数多属性决策的科学性和可靠性.

参考文献：

[1] 张全，樊治平，潘德惠. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法[J]. 系统工程理论与实践，1999，19(5)：129-133.

[2] Jahanshahloo G R, Hosseinzade L, Izadikhah M. An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data[J]. Applied Mathematics and Computation，2006，175(2)：1375-1384.

[3] 张吉军，刘家才. 区间数多指标决策问题的决策方法研究[J]. 预测，2002，21(2)：73-75.

[4] 郝飞龙，李德清. 属性值为区间数的变权综合决策方法[J]. 数学实践与认识，2008，38(5)：31-35.

[5] 叶跃祥，糜仲麦，王宏宇，梁晓艳. 一种基于集对分析的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术，2006，28(9)：1344-1347.

[6] 汪新凡，杨小娟. 基于联系数贴近度的区间数多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识，2008，38(3)：18-24.

[7] 赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州：浙江科技出版社，2000，3.

[8] 黄德才，赵克勤. 用联系数描绘和处理网络计划中的不确定性[J]. 系统工程学报，1999，14(2)：112-117.

[9] 赵克勤. 集对分析中的不确定系统理论在AI中的应用[J]. 智能系统学报，2006，1(2)：16-25.

[10] 王霞. 基于复数理论的同异型联系数及其应用[J]. 数学的实践与认识，2005，35(8)：127-131.

Multiple Attribute Decision Making and Its Applications Based on Complex Number Arithmetic Operation of Connection Number with Interval Numbers

LIU Xiu-mei[1], ZHAO Ke-qin[2]

(1. Department of Mathematics, Lianyungang Teachers College, Lianyungang 222006, China)
(2. Zhuji Institute of Connection Mathematics, Zhuji 311811, China)

Abstract: This paper discusses multiple attribute decision making question that the project' attribute numerical value and the attribute weights are expressed with interval numbers. By transforming interval numbers into connection numbers, and transforming connection numbers into the expressions used in trigonometric function according to the complex number arithmetic operation, we can obtain multi-attribute weighting synthesis decision-making principal value model. This method objectively reflected the mutual relation and affects between determinism and the uncertainty to a certain degree in multi-attribute decision making question, and its algorithm is simple, the conclusion is reliable.

Keywords: interval number; multiple attribute decision making question; connection number $a + bi$; the expressions used in trigonometric function; the complex number arithmetic operation