第 1 卷第 2 期　　智 能 系 统 学 报　　Vol. 1 №2
2006 年 10 月　　CAAI Transactions on Intelligent Systems　　Oct. 2006

集对分析的不确定性系统理论在 AI 中的应用

赵克勤

(诸暨市联系数学研究所 ,浙江 诸暨 311811)

摘　要:根据不确定性与确定性对立统一的观点 ,把同一个研究对象相对于参考集的确定性测度与不确定性测度作为一个不确定性系统 ,用联系数描述这个系统 ,根据问题的要求对联系数作适当的运算 ,由此形成基于集对分析的不确定性系统理论. 把该理论用于不确定性推理、智能计算、群体智能分析 ,思路清晰 ,算法简明 ,所得结果能较好地符合客观实际.

关键词:人工智能;不确定性;集对分析;不确定性系统理论;联系数

中图分类号: TP18　**文献标识码**:A　**文章编号**:1673-4785 (2006) 02-0016-10

The application of uncertainty systems theory of set pair analysis (SPU) in the artificial intelligence

ZHAO Ke-qin

(Institute of Zhuji Connection Number ,Zhuji 311811 ,China)

Abstract : Based on the viewpoint on the unification and opposition of certainty and uncertainty ,one same research object is taken as one uncertainty system relative to the certainty measure and uncertainty measure of the reference set , and this system is described by the connection number. And then is the connection number calculated properly according to the problem appeal , hence establishing the uncertainty system theory based on the set pair analysis. This theory is used in uncertainty inference ,intelligence computing , and colony intelligence analysis. The results accord closely with practice.

Keywords : artificial intelligence ; uncertainty ; set pair analysis ; uncertainty systems theory connection number

人工智能是设法让机器尽可能像人一样处理各种问题的技术 ,而问题具有不确定性 ,这使得人工智能所要处理的各种问题或多或少地与不确定性有关. 由于现实世界中的不确定性具有多样性、动态性和复杂性 ,经典的处理随机不确定性的概率统计理论和 20 世纪 60 年代发展起来的模糊集理论并不能完全满足人工智能处理多种不确定性问题的需要 ,人工智能仍需要探索和引进处理不确定性的新理论和新方法[1] . 鉴于作者于 20 世纪 80 年代提出的集对分析(set pair analysis ,SPA) 在处理不确定性方面有独到的见解和算法 ,且已在气象预报[2] 、小麦育种[3] 、网络计划[4] 、产品设计[5] 等许多领域得到应用[6] ,特别是在人工智能领域 ,蒋云良把集对分析用于推理研究[7] ,骆建宁把集对分析用于图像识别[8] ,朱其秀把集对分析用于人工智能基础理论不同学派融合探讨[9] ,徐忆琳把集对分析用于知识创新规律研究[10] ,邓毅雄、王兵、刘富春等把集对分析与粗糙集结合用于知识处理[11 - 14] . 文中则主要介绍集对分析的不确定性系统理论[15] ,并把其应用于不确定性推理、智能计算、群体智能分析等问题的研究 ,试图为有关人工智能系统处理含有不确定性的问题提供一种新的计算和分析技术.

收稿日期:2006-02-23.

1　集对分析简介

1.1　集对

由一定联系的 2 个集合所组成的基本单位称之为集对[10] .

由于数学中规定集合的元素可以是人、事、物、数字、概念 ,因而 ,两个学生、一对恋人、教师与学生、

领导与群众、工人与农民、商人与医生、官员与市民,以及生存与发展、投资与回报、改革与创新、计划与市场,以及太阳与地球、月亮与星星、火箭与飞船、物质与能源、信息与智能、机器与知识,以及正数与负数、实数与虚数、函数与图表、图像与方程、精确解与近似解等等,以及东西、南北、好坏、胜负、进退、盈亏、虚实、确定性与不确定性等等,都可以在一定条件下看在是集对的例子,事实上,受成对原理:"事物与概念都是成对地存在"[16]的制约,集对的例子俯拾即是,集对的内容可以各式各样.

集对可以简记为 SP(set pair).为方便起见,也可以用大写字母表示集对,如集对 H、集对 M.当要说明集对 H 是集合 A 与 B 组成时,可以用方程表示,如 $H=(A,B)$.

1.2　集对分析的基本步骤

1) 特性分析.找出所论 2 个集合各自具有哪些特性.

2) 关系分析.分为相对确定的关系分析和不确定关系分析,其中相对确定的关系分析又分为(1)同关系分析,分析哪些特性为所论 2 个集合共同具有,(或在哪些特性上协同或同一);(2)反关系分析,分析所论 2 个集合在哪些特性上相互对立;不确定关系分析也称异关系分析,分析所论 2 个集合在哪些特性上既不协同同一也不相互对立.

3) 用联系数刻划同异反的程度及其联系.基本公式为

$$U = A + Bi + Cj. \tag{1}$$

式中:A 为属于同关系的特性个数,B 是属于异关系的特性个数,C 是属于反关系的特性个数;U 称为联系数,A、B、C 统称为 U 的联系分量,并依次称为同分量、异分量、反分量;令 $A+B+C=N$,则称 N 为联系数 U 的联系范数,表示所论 2 个集合的特性总数,是表征论域大小的一个参数;j 是 C 的系数,一般取 $j=-1$,以表示 C 是与 A 方向相反的量,不计 j 的值时,仅作为反分量的标记使用;i 是 B 的系数,一般在$[-1,1]$区间视不同情况不确定取值,以说明 B 处在 A 与 C 的某个中间位置上,不计 i 的值时,仅作为异分量的标记使用.用 N 除(1)式两边,并令 $\mu=U/N$, $a=A/N$, $b=B/N$, $c=C/N$,则得:

$$\mu = a + bi + cj. \tag{2}$$

由于式(2)中的 $a+b+c=1$,所以 μ 是一个归一化联系数,由于 1 可以看作是 10 的零次幂,所以也称归一化联系数为零阶联系数,类似地把联系范数 $1<N\leq 10$ 数称为 1 阶联系数,如此等等,请见文献[6,18].习惯上称式(2)为同异反联系度表达式,简称 μ 为联系度,a、b、c 依次称为同一性测度(简称同一度),差异性测度(简称差异度),对立性测度(简称对立度),a、bi、cj 依次称为联系数 μ 的同部、异部、反部.根据式(2),容易导出式(2)所示同异反联系数又有以下等价形式:

$$\mu = a + bi, \tag{3}$$

$$\mu = a + cj, \tag{4}$$

$$\mu = bi + cj. \tag{5}$$

式(3)称为联系数的同异式或确定不确定式,式(4)称为联系数的同反式,式(5)称为联系数的异反式,它们可以分别看作是 $c=0$、$b=0$、$a=0$ 时式(2)所示同异反联系数的特款,统称联系数.

由于常见的对立类型有正负型对立 $<1,-1>$,有无型对立 $<1,0>$,实虚型对立 $<1,\sqrt{-1},>$,倒数型对立 $<1,\frac{1}{k}>$,互补型对立 $<\alpha,\beta>$ $(\alpha+\beta=1)$ 等对立类型,因而在非正负型对立问题中,j 可以取 -1 之外的值,与此同时的 i 取值也作相应变化.例如在有无型对立问题中,联系数 $\mu=a+bi+cj$ 就取 $j=0$,与此同时的 i 在$[0,1]$区间取值;下面 3.2 节智能计算中的打鸟问题就是一个有无型对立问题.另一方面,从数值计算的角度看,当 $j=0$ 时,$a+bi+cj$ 中的 cj 这一项已可忽略不计,从而由 $a+bi+cj$ 导出 $a+bi$,由此可见式(3)所示的同异式(确定不确定式)联系数 $a+bi$ 也就是有无型对立问题中取 $j=0$ 时的联系数.这种联系数目前已在网络计划、预先危险性分析等问题的处理中得到应用,请见文献[4,31];类似地,在实虚型对立问题中,取 $j=\sqrt{-1}$,这时式(2)就改写成 $\mu=a+bi+c\sqrt{-1}$,与此同时的 i 在$[1,\sqrt{-1}]$区间取值;为便于理解,可以把联系数 $\mu=a+bi+c\sqrt{-1}$ 映射到复平面上,前述的 i 在$[1,\sqrt{-1}]$区间取值这时就相当于在单位复平面上取值[32];类似地可以说明 i 与 j 在其他对立问题中的取值,但目前在研究与应用中遇到的问题大多是正负型对立问题,其他类型的对立问题还少见.

4) 对建立的联系数作适当的运算.

5) 不确定性分析.通过对联系数中不确定取值的 i 作取值分析,检验计算结果的稳定性,如有波动,则给出波动范围和给出波动规律.

2　集对分析的不确定性系统理论

联系数用数学的形式给出了一个基于集对分析的不确定性系统理论,其要点有:

1) 同一个研究对象相对于给定参考集的确定性

测度与不确定性测度是一个不确定性系统. 请参见式(1)与式(2). 首先,从全局看,当联系范数 N 确定后,其中的各个联系分量取何值具有不确定性;其次,从局部看,联系分量中的 $A(a)$ 与 $C(c)$ 是相对确定的测度,$B(b)$ 是相对不确定的测度;再次,从层次的角度看,即使处在宏观层的 $A(a)$、$C(c)$、$B(b)$ 都确定了,但处在微观层的 i 在[-1,1]区间取什么值仍有待进一步确定. 由此可见联系数是一个含有不确定性的系统.

2) 在联系数这个不确定性系统中,确定性测度与不确定性测度相互联系、相互影响、相互制约. 这首先体现在联系数中各联系分量之和等于联系范数 N,其次体现在当 i 取值时会使联系数中联系分量的大小发生变化. 如在正负型对立问题中,联系数 $\mu= a+bi+cj$ 中的 b 可以按"同反比例合成-分解原理"合成与分解,(该原理把联系数 $a+bi+cj$ 中的 b 看成是该联系数中的一个子系统,这个子系统按同一性测度与对立性测度的二元线性关系合成或分解) 当按同反比例对"b"作完全分解时,取 $i_1 = a/(a+c)$, $i_2 = c/(a+c)$,也就是让 a 与 c 决定对 b 的分解,得 $\mu= a+ba/(a+c)+[c+bc/(a+c)]j$,从而使 a 与 c 增大而 $b=0$;如果进一步考虑到 $j=-1$,则得 $\mu= a+ba/(a+c)-[c+bc/(a+c)]$,由于这时的计算结果[-1,1],因此也可以看作是把联系数中的同一性测度 a 作为"基准",把含有不确定性的 b 分解后折算到 a,再抵销 cj 对 a 的负面影响之后的值,也称联系数的综合值,或简称联系数的值. 文献[2,25]应用以上分解原理处理天气预报多元回归模型中的模糊因子,建立了基于集对分析的预报模型,使降水预报准确率提高 10%左右. 郑丕谔等应用上述原理和方法建立了基于集对论的我国城镇居民消费增量预测模型也得到满意的预测结果[26],冯利华应用上述原理和方法预报我国从 50 年代以来 29 场登陆台风暴雨降水,也获得比较理想的结果[27],最近王繁强等人把以上方法用于我国沙尘暴预报[28],诸晓明等人把其用于城市空气污染预报都获得较好的结果[29].

但是,当 $b \geq (a+c)$ 时,对 b 的分解一般不作"一步到位"式的完全分解,而是按"同异反比例合成-分解原理"(该原理把联系数 $a+bi+cj$ 中的 b 看成是该联系数中的一个子系统,这个子系统按同一性测度、差异性测度与对立性测度的三元线性关系合成或分解),分解时取 $i_1 = a/(a+b+c=a)$, $i_2 = b/(a+b+c)=b$, $i_3 = c/(a+b+c)=c$,于是得 $\mu= a+ab+bb+bc+cj$,显然 ab 偏向于 a,bc 偏向 c,bb 偏向 b,这时如仍限止于作同异反三度描述,则把上式改写成 $\mu= (a+ab)+bbi+(bc+c)j$;如果从展开角度描述,则采用五元联系数 $\mu= a+abi_1+bbi_2+bci_3+cj$,这时 i_1 [0,1], i_2 [0-,0+], i_3 [-1,0],但为应用上的方便,五元联系数一般采用 $a+bi+cj+dk+el$ 这种形式,这里的 i[0,1], $j=0$, k[-1,0], $l=-1$;五元联系数的一个实际应用例子是投票决策中对弃权这部分人群的分析:设有 10 人参加某投票,其中 3 人投赞成票,2 人投反对票,5 人投弃权票,联系数 $\mu= 0.3+0.5i+0.2j$ 按"同异反比例合成-分解原理"分析,就可以推知投弃权票的 5 人中有 $50.3=1.5$,约 1～2 人倾向赞成;$50.5=2.5$,约 2～3 人倾向中立;$50.2=1$,1 人倾向反对,相应的五元联系数是 $\mu=0.3+0.15i+0.25j+0.1k+0.2l$[39];

3) 不确定性系统中的确定性与不确定性可以在一定条件下相互转化. 例如前面通过 i 的取值,把相对不确定的 b 完全分解后分配给 a 和 c 是不确定性向确定性的转化;但初始给出的 a 和 c 中也有可能已经含有一定程度的不确定性. 例如 a 中可以有完全同一、基本同一这些不同程度的同,c 中也可以有完全对立、基本对立这些不同程度的反. 也就是说 a 和 c 自身也可能含有模糊性,这也是称 a、c 是相对确定性测度而不是绝对确定的一个原因;例如前面投赞成票的 3 人中可能 2 人是完全赞成,1 人是勉强赞成;类似地,投反对票的 2 人中可能 1 人是完全反对,1 人是基本反对;这时的 a、b、c 的不确定性主要是模糊不确定性;但如果 $\mu= 0.3+0.5i+0.2j$ 是随机地抽问 10 个人的表态后得到,这个联系数中的 a、b、c 就既有模糊性又有随机性,当然,相对 a、c 而言,b 还有介于 a、c 之间但具体位置不确定的中介不确定性.

4) 不确定性系统中的确定性与不确定性具有层次性. 这一点首先可以从联系数公式中看出,因为 $A(a)$ 是正数项,$Cj(cj)$ 是负数项(c 的负数性由 $j=-1$ 引起),$B(b)$ 则是介于 $A(a)$ 与 $C(c)$ 之间的正负不定项;其次也可以从上述要点 3) 看出,相对于 b 来说,a 和 c 中的确定性要多于不确定性;反之,相对于 a 和 c 而言,b 的不确定性要多于确定性;再次还可以从联系数的展开式:$\mu= a_1+a_2+\cdots a_n+b_1i_1+b_2i_2+\cdots b_mi_m+c_1j_1+c_2j_2+\cdots c_kj_k$ 看出,a 中有不同层次的 a_n,b 中有不同层次的 b_m,c 中有不同层次的 c_k.

5) 一个不确定性系统的确定与不确定程度与所论 2 个集合的特性数多少及关系复杂程度、以及人

们对这些关系的认识深度与分析精度有关. 例如把论域的大小从 $N = 10$ 扩大到 $N = 100$ 时,同一个研究对象的联系数一般会起变化,从联系数展开式看,当把 2 个集合在特性上的关系分成完全同、基本同、有些同、有点同、有点异、有些异、基本异、完全异、有点反、有些反、基本反、完全反时,说明了确定中有更为确定的,不确定中也有更为不确定的.

6) 对不确定性系统的描述与分析一般需要成对地展开,把握这一点有助于避免片面性. 例如把相对确定的测度分成"同一度"与"对立度"两个方面;把相对不确定的测度分成宏观不确定 b 与微观不确定 i 这两个方面;但"反"这种确定性同时又是"异"这种不确定性的下极限,因为在联系数 $\mu = a + bi + cj$ 中,当其中的 i 取下界 $i = -1$ 时,bi 就并入 cj,与此同时,"同"又是"异"的上极限,因为当其中的 i 取上界 $i = 1$ 时,bi 就并入 a;反之"异"这种不确定性又是"同"的极限,a 中的某个部分只要稍微有不同,就可以把这部分从 a 中分出进入到异类. 类似地,异也是反的极限,c 中的某个部分只要稍微有不同,就可以把这部分从 c 中分出进入到异类.

习惯上,人们对系统的不确定性总是设法从确定的角度去描述和开展分析(如概率论从无穷多观测数据入手研究随机不确定性的规律),而事实上,不确定性既有在一定条件下可以确定的一面,但更重要的一面是不确定,所以一些著名的系统科学家强调要把"确定性描述与不确定性描述相结合"[36].

7) 只有在忽略不计不确定性的情况下,才能说一个不确定性系统是确定系统,并作纯粹确定意义上的分析和处理. 如在 $\mu = a + bi$ 中,只有不计 bi 这个不确定的部份,才能根据 a 的大小、a 的变化、a 的实际内涵作出分析和得到结果. 容易看出,由于这种分析是在忽略不计不确定性情况下进行,所得到结果仍将具有一定程度的不确定性、不完整性与不可靠性,这一点容易被人忽视,由此将导致理论计算与实际情况的脱节. 例如仅根据得赞成票的多少决定一个方案的取舍会有不确定性,因为不投赞成票的不全是反对票,其中的弃权票中可能含有赞成倾向的票. 举一个例子,选人民代表要得半数以上(含半数)赞成票能当选,甲得 50 %的赞成票,10 %的弃权票,40 %的反对票;乙得 49 %的赞成票,30 %的弃权票,21 %的反对票,按"半数规则"应是甲当代表,乙不能当代表,看上去这是一个很可靠的结论,但这个结论是忽略不计赞成票所具有的不确定性这个前提下作出的;从概率论的角度看,这种不确定性是指一次投票中出现的赞成票数具有随机性;从系统的角度看,这种不确定性来自仅仅根据系统的一个局部(例如赞成票数)作决策而产生的风险. 因为事实上,从另一方面看,乙的反对票比例 21 %要比甲的反对票比例 40 %少 19 %,是一个不能忽略的差数. 因此,仅仅根据"半数规则"作出决策是有不确定性的. 为了客观地反映出伴随着确定性的不确定性,应当用联系数 $\mu = a + bi + cj$,或 $\mu(t) = a(t) + b(t)i + c(t)j$,全面记录赞成票数、弃权票数、反对票数,并作出不确定性分析.

8) 把 $a + bi + cj$ 自乘 n 次,将得到关于 bi 的 n 次幂,这说明存在着一次不确定性、二次不确定性 … n 次不确定性;但它们相对于确定性而言都可以看作是一次不确定性,因而可以在不计不确定性次幂的条件下有 $i = i^2 = i^3 = \cdots = i^n \cdots i^\infty$ 这个等式,简化.

9) 由于在 $\mu = bi + cj$ 中,j 的不同取值决定了 i 有不同取值区间,所以 i 是 j 的函数;又由于 j 的不同取值代表着不同的对立概念,由此看出不同的不确定性与不同的"对立概念"存在着对应关系,以至于可以根据不同的"对立"类型[17] 对不确定性作出一种新的分类如下:

倒数型对立($R \times 1/R = 1$) →倒数型不确定 →模糊不确定. 例如在电学中,电导 G 被定义成是电阻 R 的倒数,现设某电路中,$R = 5\ \Omega$ 的电阻是"大电阻",$R = 4\ \Omega$ 的电阻是较大电阻,…,$R = 2\ \Omega$ 的电阻是较小电阻,…,$R = 1/2\ \Omega$ 的电阻是很小电阻,…,$R = 1/4\ \Omega$ 的电阻是极小电阻,$R \leq 1/5\ \Omega$ 的电阻按定义不再称其为电阻,而称之为电导,显然这里的"大"、"较大"、"较小"、"很小"、"极小"都具有模糊不确定性,但电阻一旦达到或小于 5 的倒数 $1/5\ \Omega$,就由"量变"进入到"质变",电阻变为电导,关于电阻大小的模糊性就因电阻概念质变为电导概念而无处依附不再存在. 因而在倒数型对立问题中存在的倒数型不确定对应于模糊不确定. 由于倒数型对立是一种常见的对立,如机械加工中的柔度与刚度互为倒数. 社会经济系统中的安全度与危害度互为倒数,物理摆中的周期与频率互为倒数,除上一个不等于零的数等于乘上这个数的倒数,等等,从而提示部分模糊问题中的模糊隶属度并不完全映射到 $[0,1]$ 上.

有无型不确定($R \times 0 = 0$) →有无型不确定 →随机不确定. 这种对应性是由随机事件的性质所决定的. 以抛掷硬币为例,抛掷一枚硬币的结果有:正面朝上、反面朝上,既不是正面朝上也不是反面朝上的侧立这 3 种可能,每抛掷一次,必出现以上可能出现的情况之一,也就是一旦出现了以上情况之一,其他情况就不能再同时出现;因此,当取正面朝上为参考

集时,连续抛掷 n 次中出现正面朝上的次数就记入联系数的同部 $A(a)$,没有出现正面朝上的情况则分成反面朝上(记入联系数的反部 $Cj(cj)$)和既不是正面朝上也不是反面朝上的侧立(记入联系数的异部 $Bi(bi)$)这样 2 种情况;换句话说,随机事件在单次随机试验中要么出现(有),要么不出现(无),所以有无型不确定对应于随机不确定.

正负型对立 $(1\times(-1)=-1)$ →正负型不确定 →中介不确定. 这是因为把正负作为论域时,非正非负和既可能是正的也可能是负的这 2 种情况只能存放在"零"中,如在投票决策中,若把赞成票数记在联系数中取正值的同部,反对票数记在联系数中取负值的反部,弃权票数只能记在联系数中正负值待定的异部,换言之,弃权处于正负中间但具体位置不确定.

虚实型不确定 $(1\times(-1)^{1/2}=(-1)^{1/2})$ →虚实型不确定 →由不确知(虚拟想象)引发的不确定.

互补型不确定 $(n/m+(m-n)/m=1)$ →互补型不确定 →由信息不完全、不对称导致的不确定. 以上不同种类的不确定可以用联系数 $a+bi+cj$ 统一进行描述.

10) 经典概率统计理论中的概率仅与联系数中的同一度 a 等价. 这里有以下几个理由. 一是经典概率统计理论中的概率是频率在无穷次随机试验中的稳定性,而无穷次随机试验在一般情况下难以实现,只能通过有穷次随机试验中得到的频率代替概率,这种用有穷代替无穷导致的不确定性应该在表示概率时同时表示出,但仅用概率这个概念不便表明这种不确定性;二是把在无穷次随机试验中的频率稳定性(概率)用于有穷次随机试验的分析时,会产生由无穷代替有穷而产生的不确定性,例如在随机试验次数是无穷时得到给定事件的确切分布,但有穷次随机试验并不能确定在无穷次随机试验中出现的分布,这种不确定性也应该在表示概率时同时表示出,但仅用概率这个概念也不便表明这种不确定性. 在这里,所谓的概率已具有某种确定性(也就是频率稳定性),但客观上又存在如上所述的不确定性,以致于在不少情况下要经常提醒人们在概率的意义上理解概率. 例如说明天北京市下雨的概率是 0.7,并不保证明天一定下雨,因为这里的0.7是概率意义上的,概率论中对以上问题的深入讨论集中在统计判决两类错误的研究中. 第 3 个理由是概率所依附的随机事件本身并不总是孤立的单一事件,而往往与其他事件有着某种联系,由于这些事件是共同地反映某个事物不同侧面的事件,因此这些事件也成为概率论中基本事件空间中的事件,这种无法割断的联系又导致了不同于前述两类不确定性的另一类不确定性(因与其他事件相联系而产生的不确定性);一个简明的例子就是前述的掷分币试验,当明确随机试验中的基本事件是分币正面向上时,不得不同时考虑既不是分币正面向上也不是分币的正面向下(侧立)这一事件及其对分币正面向上这一基本事件出现频数的影响,忽略不计分币侧立这一事件的出现只能增加分币正面向上这一事件出现概率的不确定性;事实上,分币越厚,抛掷中出现分币侧立次数就越多. 综上所述,既然一个具体的概率总是有着这种或那种不确定性,就应在表明一个概率的同时指明其伴随着的不确定性;利用联系数中的同一度 a 表明概率自身,而用 bi 表示伴随概率的不确定性,就很自然地解决了概率自身及其伴随的不确定性同时表示的问题,所以说经典概率统计理论中的概率仅与联系数中的同一度 a 等价,因而是一种不完全概率. 经典概率统计理论可以在集对分析的基础上进行扩充,目前这方面的研究还处于起步阶段,但已在"相关系数的联系数化","观测数据是联系数时的统计处理","基于集对分析的区间估计"等方面开展了一些工作[32-34].

11) 模糊集理论中的隶属度也仅与联系数中的同一度 a 等价. 这是因为,从表面上看,隶属度仅指明所研究的对象属于给定参考集的程度,并没有指明所研究的对象不属于给定参考集的程度以及属于还是不属于参考集不确定的程度,实质是给出这种隶属度的同时并没有指明这种隶属度的不确定性;例如一个 60 岁的人可以按某个计算公式算得属于年老的隶属度是 0.82,但事实上不同的 60 岁有不同的衰老程度,这说明隶属度 0.82 带有不确定性,但仅用这个 0.82 无法表明这种不确定性,采用联系数 $0.82+0.18i$ 就解决了这个问题,当 i 在 $[-1,1]$ 上取值时,$0.82+0.18i$ 的值域是 $[0.64,1]$. 由此可见模糊集理论中的隶属度仅仅与联系数中的同一度 a 等价,它仅指明所研究的对象属于给定参考集的程度能够确定的一面,而忽略了所研究的对象属于给定参考集的程度不确定的一面. 因而是一种不完全隶属度;模糊集理论可以在集对分析的基础上进行扩充,以便在给出所研究的对象属于给定参考集隶属程度的同时给出该隶属度的模糊不确定性.

12) 对 n 个联系数 $a+bi+cj$ 求熵,得到同熵 $a_n\mathrm{Ln}\,a_n$、异熵 $ib_n\mathrm{Ln}\,b_n$、反熵 $jc_n\mathrm{Ln}\,c_n$,由此说明熵可以度量不确定性系统中相对明确的不确定性,如异熵 $ib_n\mathrm{Ln}\,b_n$;也可以度量不确定性系统中相对确

定性所具有的不确定性,如同熵 $a_n L n\ a_n$ 和反熵 $jc_n L n\ c_n$;从联系数 $a+bi+cj$ 中的 a、bi、cj 是一个系统的事实出发,容易理解同熵 $a_n L n\ a_n$、异熵 $ib_n L n\ b_n$、反熵 $jc_n L n\ c_n$ 也构成一个熵系统,若记这个熵系统为 S,则 S 可以称之为联系熵,并写成 $S = a_n L n\ a_n \oplus ib_n L n\ b_n \oplus jc_n L n\ c_n$ 据此可以考虑把信息熵、负熵、热力学熵等熵概念统一起来[18]. 联系熵的概念已在水资源富营养化综合评介、经济系统分析和系统脆性研究中得到应用[33-35].

13) 取三维直角坐标系 $O-XYZ$,令其中的 OX 轴为同(a)轴,OY 轴为异(b)轴、OZ 轴为反(c)轴,则得同异反三维直角坐标系,由该直角坐标系所确定的空间是同异反不确定性空间,此空间中的点是不确定的点、此空间中的线是不确定的线,此空间中的面是不确定的面,此空间中的体是确定不确定的体,由此可以借助几何学描述和处理不确定性系统问题. 类似地,根据联系数的展开式可以引出同异反多维不确定性空间和高次多维同异反不确定性空间.

14) 处于同异反多维不确定性空间中的联系数可以称为同异反多元联系数,记为

$$\mu = a_1 \oplus a_2 \cdots\cdots \oplus a_n + b_1 i_1 \oplus b_2 i_2 \oplus \cdots\cdots \oplus b_n i_n + c_1 j_1 \oplus c_2 j_2 \oplus \cdots \oplus c_n j_n = \sum a_k \oplus \sum b_k \oplus \sum a_k .$$

式中:“$\oplus$”是“联系和”运算,意指把同一对象相对于给定参考集的各个测度联系起来,在具体计算时,可以是“+”运算,也可以是其他运算,如“$\vee$”、“$\wedge$”等.

当该空间维数有无穷多时,可采用积分式表示一个同异反联系数如下:

$$\mu = \int_a + i\int_b + j\int_c$$

一般情况下数据有限,用一个离散的多元联系数:

$$u = A \oplus Bi \oplus Cj \oplus Dk \oplus El \oplus Fm \oplus Gn \oplus \cdots\cdots \oplus Xy$$

用于相关问题研究,其中的“联系和($\oplus$)”运算也可以是其他运算,如“$\vee$”、“$\wedge$”等;此外,由于习惯上对于三元联系数 $a+bi+cj$、二元联系数 $a+bi$、$a+cj$、$bi+cj$ 用“+”表示 A、Bi、Cj 之间的联系,所以对于三元联系数和二元联系数仍在习惯意义上用“+”代替“$\oplus$”,事实上,当多元联系数中联系分量的系数取确定的值时,联系和“$\oplus$”运算就退化为普通的“+”加法运算.

15) 为了分析联系数 $a+bi+cj$ 这个不确定性系统的状态,可以在先不计 i 具体数值的情况下,利用同部 a、异部 bi、反部 cj 分别处于“正”、“正负不定”、“负”的层次性,由 a、b、c 的大小关系初定这个不确定性系统的状态,这种状态可以在 a、b、c 所有大小关系的全排列中找到描述,再考察 i 在 $[-1,1]$ 变动时,这种状态的变化,由此分析不确定性系统同异反状态的不确定性.

16) 不确定性系统是演化着的系统. 从发展的角度看,可以假定当前状态的“同”原本也处在“异”的层次上,是从相对不确定的“异”发展而来,为此可以用 $a/(a+b)$ 表示这种发展的程度,并记为 ∂_a,即有 $\partial_a = a/(a+b)$;同理可以假定当前状态的“异”原本也处在“反”的层次上,是从相对确定的“反”发展而来,为此可以用 $b/(b+c)$ 表示这种发展的程度,并记为 ∂_b,即有 $\partial_b = b/(b+c)$,令 $\partial\mu = \partial_a + i\partial_b$,$i$ 按比例取值原理取 $i = \partial_a/(\partial_a + \partial_b)$,称这里的 $\partial\mu$ 为联系数 $a+bi+cj$ 的偏正联系数;反之,也可以假定当前状态的“异”原本也处在“同”的层次上,是从相对确定的“同”负向发展而来,可以用 $b/(a+b)$ 表示这种负向发展的程度,并记为 ∂_{-a},即有 $\partial_{-a} = b/(a+b)$;同理可以假定当前状态的“反”原本也处在“异”的层次上,是从相对不确定的“异”负向发展而来,为此可以用 $c/(b+c)$ 表示这种负向发展的程度,并记为 ∂_{-b},即有 $\partial_{-b} = c/(b+c)$,于是得联系数 $a+bi+cj$ 的偏负联系数 $\partial\mu = \partial_{-a} + i\partial_{-b}$,$i$ 按“比例取值原理”取 $i = \partial_{-a}/(\partial_{-a} + \partial_{-b})$,$j=-1$、联系数 $a+bi+cj$ 当前状态的实际发展趋势是偏正向发展趋势与向负向发展趋势相互矛盾的综合结果,为此计算偏正联系数 $\partial\mu$ 与偏负联系数 $\partial_{-\mu}$ 的差,不妨记为 $e = \partial\mu - \partial_{-\mu} = (\partial_a + i\partial_b) - (\partial_{-a} + i\partial_b)$、当 $e>0$ 时是正向发展趋势,当 $e<0$ 时是负向发展趋势;当 $e=0$ 时是临界趋势;例如一个年级的学生成绩,好的与比较好的占 35 %,中间状态与刚合格的占 55 %,较差与差的占 10 %,采用联系数表示得 $\partial\mu = 0.35 + 0.55i + 0.10j$,这个联系数的偏正联系数是 $\partial\mu = 0.39 + 0.85i$,取 $i = 0.39/(0.39+0.85) = 0.31$,得 $\partial\mu = 0.65$;偏负联系数是 $\partial_{-\mu} = 0.61 + 0.15i$,取 $i = 0.61/(0.61+0.15) = 0.80$,得 $\partial_{-\mu} = 0.73$;所以 $e = \partial\mu - \partial\mu = (\partial_a + i\partial_b) - (\partial_{-a} + i\partial_b) = 0.65 - 0.73 = -0.08$. 由于 $-0.08<0$,所以该年级的学生成绩存在负向发展(下降)趋势. 这与直观观察一致,因为直观上看,该年级学生成绩中好与较好部分仅占总数的 1/3 稍强,接近 2/3 的学生成绩处在中间与较差的状态;当然,这里是把处于中间状态的这部分学生看成是相对不确定的部分来展开分析的.

由此可见,偏联系数揭示出联系数所刻划的不确定性系统在一定状态下朝某个方向的发展趋势,是不确定性系统的一个重要参数[19],基于联系数的同异反状态分析和基于偏联系数的趋势分析简称为

基于集对分析的"状态–趋势分析",已在国民体质提高趋势分析[36]、民众购买体育彩票心理分析[37]、招投标决策[38]等方面得到应用.

3 应用

3.1 不确定性推理

某规则由 3 个条件决定,其可信度分别为 0.9, 0.6, 1.0, 按模糊集理论取其最小值: $0.9 \times 0.6 \times 1.0 = 0.6$; 其物理意义相当于 3 根绳子连接起来使用时,总的绳子强度与强度最差的绳子相同. 按概率论,该规则总的可信度取决于各可信度的乘积: $0.9 \times 0.6 \times 1.0 = 0.54$. 按集对分析,这 3 个条件是一个不确定性系统,这个不确定性系统的可信度有 0.6 是相对确定的,余下的 0.4 是相对不确定的,由此得联系数 $0.6 + 0.4i$, 至于这里的 i 如何取值要根据不同情况具体分析,虽然如何分析要作进一步的研究;但可以看到,取 $i = 0$ 时, $0.6 + 0.4i = 0.6$, 这是按模糊集理论计算的结果;取 $i = -0.15$ 时, $0.6 + 0.4i = 0.54$, 这是按概率论计算的结果;显然,以上的 2 个 i 值都落在 i 的定义域 $[-1, 1]$ 区间,由此可见 $0.6 + 0.4i$ (取值区间是 $[0.2, 1]$) 包括了这 3 个规则都是模糊的,或者这 3 个规则都是随机的,或者这 3 个规则既有模糊的又有随机的,或者既不能确定是模糊的,也不能确定是随机的,也不能排除是非随机非模糊的其他不确定性的等等不同情况. 如果不能判定是何种情况,那就只能从全局的角度考虑 i 在 $[-1, 1]$ 区间取值,这时规则的最小总可信度是 0.2, 最大总可信度是 1. 为什么这里的最小总可信度会远小于 3 个条件的最小可信度,而最大总可信度又是 3 个条件中的最大可信度,这是因为考虑了 3 个条件可能存在相互影响,这种相互影响既可能是相互促进的,也可能是相互抵消的;其实,前面按模糊集理论计算与按概率论计算时已在一定程度上计及了这 3 个条件的相互抵消作用,所以 2 种计算结果是小于或等于 3 个条件中的最小可信度. 这里用联系数处理时,因为还要计及既有模糊又有随机甚至还有模糊和随机以外的不确定性因素,所得结果自然要比单一地计及模糊或单一地计及随机的结果要宽泛. 当然,面对 $0.6 + 0.4i$, i 按"比例取值原理"可以取 $i = 0.6$, 这时 $0.6 + 0.4i = 0.84$, 容易看出这是一个偏向乐观的估计[20].

3.2 智能计算

树上有 10 只鸟,用枪打下 1 只,还剩几只?这个问题人脑能回答树上没有鸟了. 但如果要机器计算,答案是还剩 9 只. 按集对分析,认为 10 只鸟中的每只鸟都与其他 9 只鸟有联系,但是什么样的联系仅根据已知条件不能确定,为此把 1 只鸟与其他鸟的联系记为 $1 + 9i$, 10 只鸟打下 1 只的算式是 $10 - (1 + 9i) = 9 - 9i$, 当 $i = 1$ 时, $9 - 9i = 0$, 当 i 取 $[-1, 1]$ 中的其他正数时,则有其他结果,对应着树上的 10 只鸟中有不能飞的病鸟、刚出生的小鸟等不同情况[21]. 至于要确定 i 的具体取值,则需要补充新的信息后才能确定,在不能补充新的信息条件下,只能作出树上的鸟还剩 $[0, 9]$ 只的回答.

3.3 群体智能分析

在由 n 个人组成的群体中,每个个体能发挥的智能不仅受其自身智能的影响,还受其他个体的影响,如启发、激励、排斥、压制等,具体是何种影响具有不确定性. 不失一般性,设个体自身的智能是 1, 其他每个个体对该个体智能的影响设为 i, 则单个个体在由 n 个人组成的群体中能实际产生的智能是 $1 + (n - 1)i$, n 个人组成的群体智能是 $n[1 + (n - 1)i] = n + (n^2 - n)i = n + n^2 i - ni$, 当 $i = 1$ 时, $n + n^2 i - ni = n^2$ 这说明在最好状况下,群体智能是个体智能的平方,从一个侧面说明了通常情况下一个学术团体的智能大于个体会员的智能. 当 $i = -1$ 时, $n + n^2 i - ni = 2n - n^2$, 对该式求关于 n 的导数并令其等于零,得 $2 - 2n = 0$, 解得 $n = 1$, 这也从一个侧面说明了群体协同状况在最不理想情况下,群体智能不如个体智能. 在本问题中取 $n = 3$, 就是所谓的"三个和尚没水喝 $(1 + 1 + 1 < 3)$"与"三个皮匠抵个诸葛亮 $(1 + 1 + 1 > 3)$"问题.

4 结束语

由于集对分析中的不确定性系统理论把不确定性与确定性作为一个对立统一体加以研究,认为失去了其中的一方,另一方将失去了对照物而无从说明,因此该理论也被称为确定不确定系统理论,或简称为集对论[15]. 又因为该理论侧重从确定性与不确定性的相互对立,相互联系与在一定条件下的相互转化中去认识和处理不确定性,所以该理论所指的不确定性并不专指某种不确定性,而是包含了多种不确定性,这一思想具体的体现在集对分析对不确定性持"客观承认、系统描述、定量刻划、具体分析"的态度上[22], "客观承认"是指联系数中设置了一个在 $[-1, 1]$ 取值的不确定数; "系统描述"是指从同异反多角度、多层次描述不确定性,特别是从确定与不确定 2 个方面描述不确定性; "定量刻划"是指采用了联系数这个新的数学工具; "具体分析"包括了对不同的不确定性要具体分析,对不确定数 i 取值要

具体分析等等,因而内容丰富. 但限于篇幅,文中仅以要点的形式对该理论作了简介.

文中所举的 3 个应用例子看上去简单,但具有重要意义,如例 1 是我国一本著名的人工智能教材中的例子,但教材中仅从概率论和模糊集理论 2 个方面作了讨论,其实由于不确定性和 3 个证据相互关系的多种可能性与复杂性,完全有可能出现其他的结果,需要突破概率论与模糊集这 2 个理论的约束考虑其他结果的可能性和用其他方法进行处理来展示出其他可能的结果;从集对分析的不确定性系统理论看,例 1 中 3 个证据的可信度是确定的数,但 3 个证据的关系存在不确定性;也可以认为题目已给出的确定的可信度与题目末给出的可信度的补数存在不确定性关系,因而可先把各个可信度联系数化(如把 0.6 联系数化为 $0.6 + 0.4i$)后再作适当的联系数运算. 例 2 与例 3 并非是 2 个特例,而是说明了一旦把研究对象的这一部分与另一部分联系起来时会有不确定性产生,这种不确定性很多情况下来自对这种联系的机制并不完全清楚,例如超大规模的平行式分布智能系统,多 Agent 系统等等,承认这种不确定性并作数学上的客观描述和分析,能使人们更正确地认识所研究的对象和更客观地处理其中的不确定性. 不难想见,对现有模糊集理论中的隶属度作联系数化处理后,将会把模糊集的理论和应用研究推向一个新的水平;同样地,对概率的联系数化也将使传统的概率论勃发新的生机;毫无疑问,不确定性理论的这种创新将为人工智能处理不确定性问题带来新的曙光,它将促使人工智能的研究结果更加接近人的智能.

当然,从历史的角度看,作为一种新的处理不确定性的理论不可能一蹴而就,尤其是集对分析的不确定性系统理论试图从一个综合的平台上,用联系数这个新的数学工具处理不同的不确定性,在理论和方法上都会有相当的难度;另一方面,从人脑认识客观世界的秩序来看,人们总是先认识和研究某种单一的不确定性及其规律,再从个别转向一般,去研究多种不确定性共存的复杂问题,这又是历史的必然;显而易见,要研究这样一个既复杂又困难的问题,需要哲学的指导,这就是要把确定性与不确定性作为一个对立统一体进行研究;也需要借鉴系统科学的理论方法,把关于同一研究对象的确定性测度和不确定性测度作为一个系统加以研究;联系数则把人们对确定性与不确定性辩证关系的认识转换成一个具体的数学工具,从而使得在数学意义上对多种不确定性共存问题的分析和研究成为可能,纵观中国期刊网上有关集对分析的 600 多篇论文,可以认为坚冰已经打破,航船也已开启,需要我们努力学习,刻苦研究,取长补短,勇于创新,不断发展这一理论,为人工智能事业有所贡献.

参考文献:

[1]史忠植. 认知和智能[A]. 第 7 届全国人工智能学术研讨会论文集[C]. 西安:西北工业大学出版社,1992.
SHI Zhongzhi. Cognition and intelligence [A]. Proceedings of 1992 National Conference on Artificial Intelligence (CAAI- 7) [C]. Xi 'an: Northwestern Polytechnic University, 1992.

[2]薛根元,王国强. 不确定性理论集对分析在预报模型建立中的应用研究[J]. 气象学报,2003,61(5):592 - 599.
XUE Genyuan, WANG Guoqiang. The application research of the theory of uncertainty-Set Pair Analysis in establishment of weather forcast models[J]. Acta Meteorologica Sinica, 2003, 61(5):592 - 599.

[3]郭瑞林,杨春林,关　立. 小麦品种区域试验的同异分析方法研究[J]. 麦类作物学报,2001,21(3):60 - 63.
GUO Ruilin, YANG Chunling, GUAN Li. Study on identical and different analysis method of wheat variety regional test[J]. Acta Tritical Crops, 2001,21(3):60 - 63.

[4]黄德才,赵克勤. 用联系数描述和处理网络计划中的不确定性[J]. 系统工程学报,1999,14(2):112 - 117.
HUANG Decai, ZHAO Keqin. Using the connection number of the SPA to express and process the uncertainties in network planning[J]. Journal of System Engineering, 1999,14(2):112 - 117.

[5]李志辉,夏少云,查建中. 基于推理的同异反产品设计理论及其应用[J]. 计算机辅助设计理论与图形学学报,2003,15(11):1397 - 1403.
LI Zhihui, XIA Shaoyun, CHA Jianzhong. Cbr-based same-inderfinite-contrary product design and application [J]. Journal of Computer Aided design and Computer graphics, 2003,15(11):1397 - 1403.

[6]赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州:浙江科技出版社,2000.

[7]蒋云良,张裔智,潘云鹤,赵克勤. 基于集对分析的定量推理初探[J]. 计算机工程,1996,22(3):286 - 290.
JIANG Yunliang, ZHANG Yizhi, PAN YunHe, ZHAO, Keqin. First exploration of quantitative inference of identity-discrepancy_contrary based on the set pair analysis [J]. Computer Engineering, 1996,22(3):286 - 290.

[8]骆建宁. 集对分析在图像识别中的应用[A]. 中国人工智能进展[C]. 北京:北京邮电大学出版社,2001.
LUO Jianning. Application of SPA for images (2001) [C]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications (BUPT) Publishing House, 2001.

[9]朱其秀. 集对分析用于人工智能研究的思考[J]. 绍兴文理学院学报, 1996, 16(4): 113 - 118.
ZHU Qixiu. Thought of research artificial intelligence with Set Pair Analysis[J]. Journal of Shaoxing College of Avts and Sciences, 1996, 16(4): 113 - 118.
[10]徐忆琳. 用 SPA 同异反系统理论研究知识创新规律[J]. 科学学研究, 2002, 20(3): 327 - 329.
XU Yi ling. Research on the law of knowledge innovation using IDC - SPA theory[J]. Studies in Science of Science, 2002, 20(3): 327 - 329.
[11]邓毅雄, 黄兆华. 不完备信息系统的基于集对分析粗糙集模型[J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(2): 100 - 103.
DENG Yixiong, HUANG Zhaohua. Rough set model based on Set Pair Analysis in incomplete information system[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2005, 22(2): 100 - 103.
[12]黄 兵, 钟 斌, 周献中. 改进集对粗集模型[J]. 计算机工程与应用, 2004, 30(2): 82 - 84.
Huang Bing, Zhong Bin, Zhou Xianzhong. Improved rough set model based on Set Pair[J]. Computer Engineering and Applications, 2004, 30(2): 82 - 84.
[13]刘富春. 基于集对分析的变粗糙集模型[J]. 计算机工程与应用, 2005, 31(10): 74 - 76.
Liu Fuchun. Variable precision rough set model based on Set Pair Analysis[J]. Computer Engineering and Applications, 2005, 31(10): 74 - 76.
[14]陈世清, 唐志航, 肖建华. 基于粗糙集联系度的数据挖掘算法及应用研究[J]. 计算机应用, 2004, 24(6): 74 - 77.
CHEN Shiqing; TANG Zhihang, XIAO Jianhua. Algorithm of data mining based on rough sets Pair Analysis and its application[J]. Computer Applications, 2004, 24(6): 74 - 77.
[15]赵克勤, 宣爱理. 集对论 ——一种新的不确定性理论[J]. 系统工程, 1996, 14(1): 18 - 23.
ZHAO Keqin, XUAN Aili. Set Pair thory - a new method of non-define and its application[J]. Systems Engineering, 1996, 14(1): 18 - 23.
[16]赵克勤. 成对原理及其在集对分析(SPA)中的作用与意义[J]. 大自然探索, 1998, 17(4): 90.
ZHAO Keqin. The function and meaning of Pair principle in the Set Pair Analysis[J]. Exploration Nature, 1998, 17(4): 90.
[17]赵克勤. 集对分析与熵的研究[J]. 浙江大学学报, 1992, 6(2): 69 - 73.
ZHAO Keqin. Study enіropy based on the Set Pair Analysis[J]. Journal of Zhejiang University, 1992, 6(2): 69 - 73.
[18]赵克勤. 基于集对分析的对立分类、度量与应用[J]. 科学技术与辩证法, 1994, 11(2): 26 - 30.
ZHAO Keqin. The contrariety, classification, degree and applications of Set Pair Analysis[J]. Sciencs, Technology and Dialectics, 1994, 11(2): 26 - 30.
[19]赵克勤. 偏联系数[A]. 中国人工智能进展 2005[C]. 北京: 北京邮电大学出版社.
ZHAO Keqin. Partial connection number [A]. Beijing: Progress of Beijing University of Posts and Telecommunications (BUPT) Publishing House, 2005.
[20]蔡自兴, 徐光佑. 人工智能及其应用[M]. 北京, 清华大学出版社, 2003.
[21]赵克勤, 姜玉声. 集对分析中的辩证思维探析[J]. 系统辩证学学报, 2000, 8(3): 32 - 36.
ZHAO Keqin, JIANG Yusneng. Primary discussion on some systematical and dialectical thinking in Set Pair Analysis [J]. Journal of Systemic Dialectics, 2000, 8(3): 32 - 36.
[22]赵克勤. 集对分析对不确定性的描述和处理[J]. 信息与控制, 1995, 24(3): 162 - 166.
ZHAO Keqin. Disposal and description of uncertainties based on the Set Pair Analysis[J]. Information and Control, 1995, 24(3): 162 - 166.
[23]赵克勤. 集对分析在人工智能中的应用[A]. 第 7 届全国人工智能学术研讨会论文集[C]. 西安: 西北工业大学, 1992.
ZHAO Keqin. Applicationsof the Set Pair Analysis in artificial intelligence[A]. Proceedings of 1992 National Conference on Artificial Intelligence (CAAI - 7) [C]. Xi'an: Northwestern Polytechnic University, 1992.
[24]赵克勤, 黄德才. 联系数在人工智能中的应用[A]. 中国人工智能进展 2001[C]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2001.
ZHAO Keqin, HUANG Decai, Application of Connection Number in Artificial Intelligence[A]. Progress of Artificial Intelligence in Caina (2001) [C]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications (BUPT) Publishing House, 2001.
[25]王国强, 赵克勤, 郑选军. 天气预报多元回归模型中模糊因子的集对分析[J]. 科技通报, 2004, 20(2): 151 - 155.
WANG Guoqiang, ZHAO Keqin, ZHENG Xuanjun. Application of Set Pair Analysis to fuzzy predictors of multiple regression weather forcast models[J]. Bulletin of Science and Technology, 2004, 20(2): 151 - 155.
[26]郑丕谔, 岳成艳. 基于集对论的居民消费研究[J]. 数理统计与管理, 2003, 22(6): 36 - 40.
ZHENG Pie, YUE Chengyan. SPA-based investigation into urban inhabitant's consumption[J]. Application of Statistics and Management, 2003, 22(6): 36 - 40.
[27]冯利华. 登陆台风降水预报[J]. 海洋通报, 2000, 19(2): 75 - 79.
FENG Lihua. Precipitation forecast of landing typhoon [J]. Marine Science Bulletin, 2000, 19(2): 75 - 79.

[28]王繁强,郭大海.不确定性理论集对分析在沙尘暴预报中的应用研究[J].中国沙漠,2006,26(2):268 - 272.
WANG Fanqiang, GUO Damei. Application of uncertainty-Set Pair Analysis for sandstorm forecast in Northwest of China[J]. Journal of Desert Research China,2006,26(2):268 - 272.

[29]诸晓明,王国强.集对分析在城市空气污染预报中的应用研究[J].应用气象学报,2006,17(1):124 - 128.
ZHU Xiaoming, WANG Guoqiang. The application of Set Pair Analysis on city air pollution index forecasting [J]. Journal of Applied Meteorological Science, 2006, 17(1):124 - 128.

[30]张清河.基于联系数的预先危险性分析技术与应用[J].数学的实践与认识,2005,35(3):165 - 171.
ZHANG Qinghe. A new technology and its application of preliminary hazard analysis considering uncertainty [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2005,35(3):165 - 171.

[31]王　霞.基于复数理论的同异型联系数及其应用[J].数学的实践与认识,2005,35(8):127 - 132.
WANG Xia. Identical-different connection number and its applications based on complex number theory [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2005,35(8):127 - 132.

[32]余国祥.基于 SPA 的学生成绩相关性研究[J].浙江师范大学学报(自然科学版),1997,20(3):37 - 41.
YU Guoxiang. A study of relatedness of students achievement based on SPA[J]. Journal of Zhejiang Normal University (Natural Sciences), 1997,20(3):37 - 41.

[33]冯彩芝,姜玉声,赵克勤.基于集对分析的同异反统计初探[J].统计研究,1999(增刊):195 - 198.
FENG Caizhi, JIANG Yusneng, ZHAO Keqin. First discuss similarities-dissimilarities-oppositions statistical on the Set Pair Analysis[J]. Statistical Research,1999, supplementary issue: 195 - 198.

[34]陈华豪,汪光先.将集对分析用于区间估计的探讨[J].苏州丝绸工学院学报,1997,17(2):53 - 56.
CHEN Huahao, WANG Guangxun. Study on applying set pair analysis to interval estimation [J]. Journal of Suzhou Institute of silk Textile Technology, 1997, 17(2):53 - 56.

[35]许国志,顾基发,车宏安.系统科学[M].上海:上海科技教育出版社,2000.

[36]沈定珠,刘青青.国民体质提高趋势的联系数分析[J].北京体育大学学报,2005,28(6):771 - 773.
SHEN Dingzhu, LIU Qingqing. Analysis on connection number of the improvement trend of the national physique [J]. Journal of Beijing Sport University, 2005,28(6):771 - 773.

[37]张林凤.同异反态势分析在民众对体育彩票认知程度和购买心理研究中的应用[J].北京体育大学学报,2005,28(11):1495 - 1497.
ZHANG Linfeng. Research on the application of ZDC state analysis in the study of public awareness of sport lottery and purchase psychology[J]. Journal of Beijing Sport University,2005,28(11):1495 - 1497.

[38]张清河,赵克勤.集对分析联系数在施工招标决策中的应用[A].决策科学理论与发展[C].北京:海洋出版社,2005.
ZHANG Qinghe, ZHAO Keqin. Apply of connection number in Set Pair Analysis in the decision of engineer bidding [A]. Decision Sciences Theory and Development [C]. Beijing:Ocean Press,2005.

[39]赵克勤,曾　伟.基于集对分析(SPA)的弃权问题研究[J].管理科学学报(决策与决策支持系统),1995,5(3):86 - 94.
ZHAO Keqin, ZENG Wei. Research of abstain from voting based on the Set Pair Analysis [J]. Journal of Manegement Sciences In China (Journal of Decision Making and Decision Support Systems), 1995,5(3):86 - 94.

作者简介:

赵克勤,男,1950 年生,浙江省诸暨市联系数学研究所研究员,中国人工智能学会人工智能基础专业委员会副主任,集对分析联系数学专业筹备委员会主任,1989 年提出集对分析(联系数学),已出版《集对分析及其初步应用》专著一部,发表论文 80 余篇.