不用相对性原理推导洛伦兹变换

黄兴滨

（黑龙江大学物理科学与技术学院，哈尔滨 150080）

摘　要: 本文不需要相对性原理，仅以光速不变原理作为基本的出发点，结合时、空的均匀性及空间的各向同性，简单而严格地给出了洛伦兹变换的一种全新的推导方法。

关键词: 狭义相对论；光速不变原理；相对性原理；洛伦兹变换

PACC：0330; 4225

0. 引言

众所周知，1905 年爱因斯坦在其著名的论文“论动体的电动力学”中建立了狭义相对论[1]。文中利用了两条基本假设和时、空的普遍性质推导出了洛伦兹变换。第一个假设是相对性原理：**在不同的惯性参考系中，一切物理规律都是相同的**。第二个假设是光速不变原理：**真空中的光速在不同的惯性参考系中都是相同的，与光源的运动和观察者的运动无关**。而爱因斯坦在推导洛伦兹变换中还在两条基本原理之外补充了一个条件，有文献称之为“爱因斯坦条件”[2]。这个条件是说，从静止系观测到运动系以速率 u 运动，则反过来从运动系看，静止系必定以相同的速率 u 反向运动。后来于 1922 年，爱因斯坦在《相对论的意义》中还指出[3]，仅仅根据光速不变原理来推导洛伦兹变换，存在着一个“漏洞”。他指的就是上述补充条件。然后又说相对性原理不允许这样的漏洞存在，实际上把上述补充条件作为相对性原理的推论。但相对性原理陈述起来很简单，使用起来却不容易，关键是物理规律如何界定，什么

情况下是物理规律相同。因此文献[2]还指出学术界对这样的推论也存在疑虑。

我们的研究发现：推导洛伦兹变换不必使用相对性原理，而只要假定光速不变原理成立，加之时、空的均匀性和空间的各向同性就可严格地推导出爱因斯坦的补充条件进而推导出洛伦兹变换公式。这无疑对学习和理解狭义相对论有着积极的意义。这也似乎暗示我们，狭义相对论的基石应该是光速不变原理，而不一定是相对性原理。

1. 时、空的普遍性质

在各种关于洛伦兹变换的推导中，都或明或暗地使用了时、空的均匀性和空间的各向同性。我们的推导也要基于这样的条件，所以首先强调之。例如：爱因斯坦在其著名的论文“论动体的电动力学”中推导洛伦兹变换时，其中一个基本的出发点就是时、空的均匀性，正如文中所说：“**首先，这些方程显然应当都是线性的，因为我们认为空间和时间是具有均匀性的。**”

又如：爱因斯坦用静止在惯性系中的每个点‘时钟’定义了每个点的时间、用对光速的测量定义了点和点之间的‘公共时间’、进而用静止在静止坐标系中的钟定义了‘静系时间’和对于一切安置有同运动系相对静止的钟的点定义了‘动系时间’。实际上这里应用了时间的均匀性，即各处的时间都是均匀地流逝着；也应用了空间的各向同性，即沿着空间的各个方向光具有相同的速率。本文的论证也是建立在时、空的这些普遍性质的基础之上。

2. 两惯性系间的相对运动速度

考虑 K 和 K' 两个相对作匀速直线运动的参照系，设在 K 系上观测到 K' 系以速率 u 沿其 x 轴的正方向运动，且 K' 系的 x' 轴与 x 轴重合，假定在 K 系中 $t=t_1$ 时刻，x 轴上的 M 点

与 x' 轴上的 M'点重合，且观测到 M 处有一闪光发出，而 K' 系中于 $t'=t'_1$ 时刻观测到该闪光从 M'点发出，如图 1 所示。

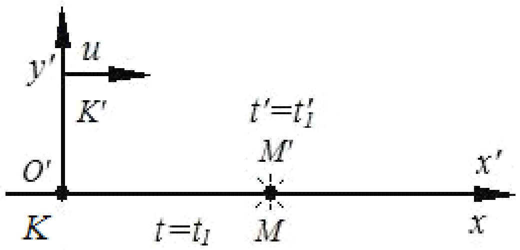

图 1. K 系内 t_1 时刻观测到 M 与 M' 重合并发出一个闪光。

Fig.1 there is a flash of light in the frame K when points M and M′ are coincident at time t_1.

我们的问题是如何求解在 K' 系内观测 K 系的运动速度？下面我们仅从“光速不变原理”与时、空的普遍性质出发，通过下面简单计算可以证明：当已知 K 系观测到 K' 系沿其 x 轴的正方向运动速率为时 u，则 K' 系将观测到 K 系以相同的速率 u 沿其 x' 轴的负方向运动。

设静止在 K 系内于 $t=t_2$ 时刻观测到闪光同时到达 A、B 两点，且 M'点从 M 点运动到 C 点与 C 点重合，K 系中观测到 K' 系内的 A'点与 A 点重合、B'点与 B 点重合、D'点与 M 点重合，如图 2 所示。

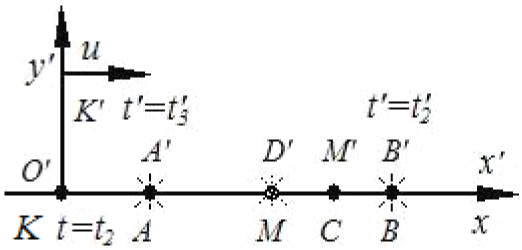

图 2. K 系内 t_2 时刻观测到闪光同时到达 A、B 处

Fig.2 the flash of light arrives at points A and B in frame K at time t_2.

根据图 2 中长度的几何关系有

$$AB = 2AM = 2MB = 2c(t_2 - t_1) \qquad (1)$$

$$MC = u(t_2 - t_1) = uAB/2c \qquad (2)$$

其中 c 为真空中的光速。

因为 $A'B'$、$A'M'$、$M'B'$ 分别表示的是 K' 系中的两点长度，因此是固有长度，按照运动长度的测量准则，在 K 系内 t_2 时刻同时地观测到运动系中的两点间的固有长度 $A'B'$ 同时地与 AB 重合，所以 AB 是 $A'B'$的测量长度，同理 AC 是 $A'M'$ 、CB 是 $M'B'$ 的

测量长度。根据空间的均匀性可得：静止系中观测长度与运动系中的固有长度应该是线性关系，具有相同的比例系数，设其为α，则

$$\begin{aligned} &AB=\alpha A'B',\ AC=\alpha A'M' \\ &CB=\alpha M'B',\ MC=\alpha D'M' \end{aligned} \tag{3}$$

静止在 K' 系内的观察者观测上述过程是：闪光于 t'_1 时刻从 M'点出发，于 t'_2 时刻闪光到达 K' 系的 B'点并与 K 系的 B 点重合，于 t'_3 时刻闪光到达 K' 系的 A'点并与 K 系的 A 点重合。根据光速不变原理，静止在 K' 系内观测到 B'处闪光时间 t'_2 为

$$t'_2=t'_1+M'B'/c \tag{4}$$

在 K' 系内观测到 A'处闪光时间为

$$t'_3=t'_1+A'M'/c \tag{5}$$

由图2中的几何关系易知 $t'_3>t'_2$。这就是著名的同时的相对性，即一个参照系内两点同时刻发生的闪光事件，在另一个相对作匀速直线运动的参照系内观测是发生在不同的时刻。联立式(1)、(2)、(3)、(4)、(5)，计算出 A'、B' 两点观测到 A、B 两点同时闪光的时间差为

$$\begin{aligned} t'_3-t'_2&=\frac{A'M'-M'B'}{c}=\frac{2MC}{\alpha c} \\ &=\frac{u}{c^2}\frac{AB}{\alpha}=\frac{u}{c^2}A'B' \end{aligned} \tag{6}$$

(6)式的物理意义在于：K 系内 t_2 时刻观测到 K' 系内的 A'、B' 两点与 A、B 两点同时重合，而 K' 系内观测并不同时重合，而先后重合的时间差正比于 $A'B'$ 的长度。根据时、空的均匀性可以把这一结果推广到 K' 系内所有的点。因此根据(6)式可以简单计算出图 2 中 K' 系内观测到 D'点与 M 点重合的时间 $t'_{D'}$ 与 t'_2之差为

$$t'_{D'}-t'_2=\frac{u}{c^2}D'B'=\frac{u}{c^2}\frac{MB}{\alpha} \tag{7}$$

静止在 K' 系内观测到 t'_1 时刻 K 系的 M 点与 M'点重合，$t'_{D'}$ 时刻 M 点与 D'点重合，因此，M 点的运动时间为 $t'_{D'}-t'_1$，运动距离为 $D'M'$。

$$\begin{aligned} t'_{D'}-t'_1&=\frac{M'B'}{c}+\frac{u}{c^2}\frac{MB}{\alpha} \\ &=\frac{CB}{c\alpha}+\frac{u}{c^2}\frac{MB}{\alpha}=\frac{t_2-t_1}{\alpha} \end{aligned} \tag{8}$$

所以 K' 系内观测到 K 系的 M 点的运动速率 u' 为

$$u' = \frac{D'M'}{t'_{D'} - t'_1} = \frac{\alpha MC}{(t_2 - t_1)\alpha} = u \qquad (9)$$

至此，我们仅从光速不变原理和时空的普遍性质证明了,两个惯性系之间的相对运动速度的关系是大小相等方向相反。

3. 长度收缩的简单推导

解决了两个惯性系之间的相对运动的速度关系后，我们继续讨论两个惯性系之间长度的比对关系。既然 K' 系不能同时观测到 A'、B' 两点的闪光，静止在 K' 系中考察 $t'=t'_2$ 时刻 B' 与 B 重合时，会同时观测到什么？

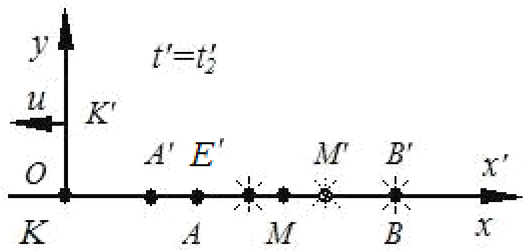

图 3. K' 系内 t'_2 时刻观测到 B'点闪光的情形

Fig.3 the flash is observed on point B′ in the K′ at time t'_2.

在图 3 中给出了在 K' 系内凝固在 t'_2 时刻观测到 B'点与 K 系的 B 点重合且观测到闪光到达该点时的情况。问题是如何确定此时 K 系中 A 点的位置？根据两个惯性系的相对运动关系可知，只有当 $t'=t'_3$ 时，点 A 才与 A' 点重合，那么 t'_2 时刻 A 点只能与 $A'B'$ 间的某点 E' 重合，而当 t'_3 时刻 A 点以速率 $u'=u$ 向左运动了 $t'_3-t'_2$ 时间后才能与 A'点重合。所以联立(6)式有

$$A'E' = u(t'_3 - t'_2) = \frac{u^2}{c^2}\frac{AB}{\alpha} \qquad (10)$$

当在 K' 系内凝固在 t'_2 时刻观测 K 系的运动瞬间时，运动系 K 内的两点间距 AB 是固有距离，K' 系内观测到 $E'B'$与 AB 同时重合是观测距离，而且 K' 系内观测到 K 系也是以速率 u 运动，因此，静止在 K' 系内的观测长度与运动系中的固有长度的比例系数不变，仍为α，所以有 $E'B' = \alpha AB$。由 $A'E'+E'B' = A'B' = AB/\alpha$，则得

$$\frac{u^2}{c^2}\frac{AB}{\alpha} + \alpha AB = \frac{AB}{\alpha} \qquad (11)$$

因为比例系数不能为负，所以可由(11)式解出比例系数α为

$$\alpha=\sqrt{1-u^2/c^2} \tag{12}$$

至此，我们又从光速不变原理和时、空的性质证明了：两个惯性系之间的长度观测关系，即静止系在确定时刻同时地观测到运动系两点间的固有长度时，观测长度等于固有长度乘上α因子，即众所周知的‘尺缩效应’。

4. 洛伦兹变换的简单推导

利用长度收缩和两参照系相对运动的速率不变，则可简单地推导出洛伦兹变换，仍假设 K 和 K' 两个参照系如图 4 所示，K' 系以速率 u 相对于 K 系运动，运动方向沿 K 系 x 轴的正方向，当两参照系的原点 O 与 O' 重合时，设两参照系的时间 $t=t'=0$。

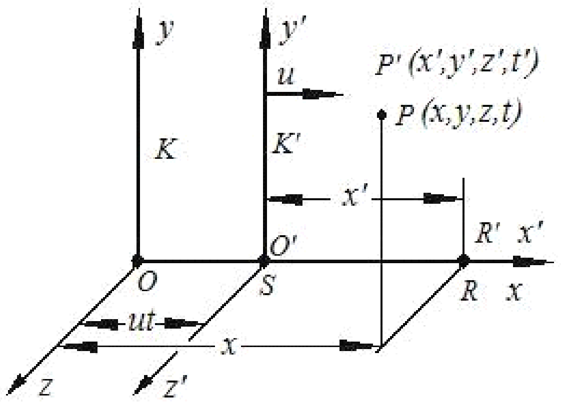

图 4. K 系内 t 时刻观测到某事件发生在 P 点，且与 P'点重合

Fig.4 there is an event on point P in the frame K at time t.

下面计算当某时刻发生在空间某点的一个事件在两个参照系内的两套坐标值之间的关系。我们假定该事件在 K 系中观测发生在 $P(x,y,z,t)$点，在 K' 系观测是发生在 $P'(x',y',z',t')$ 点，事件发生时，P' 点与 P 点重合。

在 K 系的 t 时刻观测到 K' 系是静止的，设此时 O'与 S 重合，P' 的垂足 R' 与 R 重合，这时 $O'R'=x'$ 为固有长度，SR 为观测长度，由长度收缩有

$$x-ut=\alpha x' \tag{13}$$

或 $$x'=\frac{x-ut}{\alpha} \tag{14}$$

同样，图 5 给出了在 K' 系的 t' 时刻观测到 K 系静止的情况，这时，P 与 P' 重合，P 点的垂足 R 与 R' 重合，并设 O 与 x' 轴上的 T' 点重合，所以有 $O'T'=ut'$，现在 $OR=x$ 为固有长度，$T'R'=x'+ut'$ 为观测长度，根据长度收缩有

$$x' + ut' = \alpha x \tag{15}$$

或 $$x = \frac{x' + ut'}{\alpha} \tag{16}$$

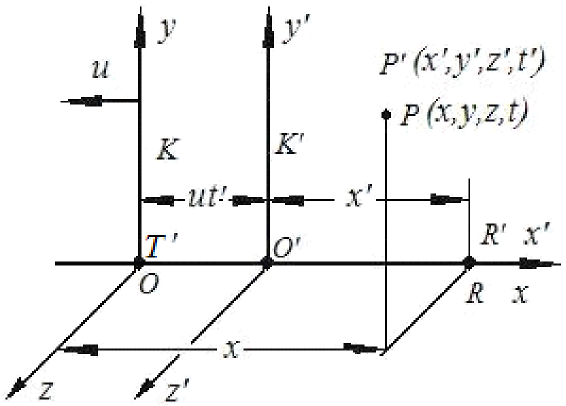

图 5. K' 系内 t' 时刻在 P'点观测到图 4 中 P 点发生的事件

Fig.5 the event of point P is observed on point P′ in the frame K′ at time t′.

联立(13)、(15)式可解出

$$t = \frac{t' + ux'/c^2}{\alpha} \tag{17}$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\alpha} \tag{18}$$

下面利用光速不变原理分析 y 与 y'、z 与 z' 的变换关系。因为 y、z 坐标都与相对运动方向垂直，因此它们的变换不但是线性的也必有相同的比例系数 λ，即

$$y = \lambda y', \quad z = \lambda z' \tag{19}$$

假设在 K 系中的某一时刻 t_1 于点 $P_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$处发出一闪光，于 t 时刻到达图 4 中的 $P(x,y,z,t)$点。则根据 P_1P 两点间的距离等于光速乘以光运动的时间有

$$\begin{aligned}&(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ &= c^2(t - t_1)^2\end{aligned} \tag{20}$$

上述过程在 K' 系内观测则是：在 t'_1 时刻闪光从 $P'_1(x'_1,y'_1,z'_1,t'_1)$点发出，其坐标值应满足式(14)、(18)、(19)的变换关系，闪光与 t' 时刻到达图 5 中的 $P'(x',y',z',t')$点。根据光速不变原理，P'_1P' 两点间的距离也应等于光速乘以 K' 系内观测光运动的时间。即

$$\begin{aligned}&(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2 + (z' - z'_1)^2 \\ &= c^2(t' - t'_1)^2\end{aligned} \tag{21}$$

将式(14)、(18)、(19)的变换关系应用到(21)式有

$$\begin{aligned}&(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2/\lambda^2 \\ &+ (z - z_1)^2/\lambda^2 = c^2(t - t_1)^2\end{aligned} \tag{22}$$

联立(20)与(22)式并考虑比例系数 λ 不能为负，则解出 λ =1。

由式(19)得出 y 与 y'、z 与 z' 的变换关系是

$$y = y', \quad z = z' \tag{23}$$

因此，仅从光速不变原理出发并结合时、空的普遍性质可简单地推导出洛伦兹变换。式(14)、(18)、(23)给出了所谓的洛伦兹正变换，式(16)、(17)、(23)给出了所谓的洛伦兹逆变换。实际上，只有一组是独立的，因为已知一组可以通过联立方程组解出另一组的变换公式。

5. 结果讨论

众所周知，狭义相对论是建立在相对性原理和光速不变原理的基础上。当然在建立过程中还要或明或暗地使用到时、空的普遍性质，也就是时、空的均匀性和空间的各向同性。而相对性原理似乎是狭义相对论的第一原理，当使用光速不变原理推导洛伦兹变换遇到问题时，总要求助于相对性原理。但相对性原理的修补方法比较生硬，总让人心存困惑。

而本文的结果显示不必使用相对性原理，仅仅由光速不变原理可以证明：从静止系观测到运动系以速率 u 运动, 则反过来从运动系看，静止系必定以相同的速率 u 反向运动；进一步推导出运动方向的长度收缩公式；最后建立起狭义相对论的核心——洛伦兹变换。这应该是洛伦兹变换的一个全新的推导方案。

参考文献

[1] Einstein A. Ann. Physik, 1905, 17: 891—921; 中译文: 爱因斯坦全集. 第二卷. 范岱年, 等译. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2002: 243—267.

[2] 关洪. 再谈洛伦兹变换的推导. 大学物理[J], 2007, 26(11): 11—12.

GUAN Hong. Further discussions on the derivation of Lorentz transformation.COLLEGE PHYSICS[J], 2007, 26(11): 11—12.

[3] Einstein A. 相对论的意义[M]. 李灏, 译. 北京: 科学出版社, 1961: 16—22.

The derivation of the Lorentz transformation formulas without using the principle of relativity

Huang Xing-Bin

(College of Physics Science and Technology, Heilongjiang University, Harbin 150080)

Abstract

In this paper, the Lorenz transformation is derived using the principle of constancy of light velocity and the universal properties of space-time only.

Keywords: Special Relativity; Principle of Constancy of Light Velocity; Principle of Relativity; Lorentz Transformation