第 32 卷第 1 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol.32 No.1
2008 年 2 月　　JOURNAL OF JIANGXI NORMAL UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)　　Feb.2008

文章编号:1000-5862(2008)01-0048-02

# 关于磁 Appell 函数的三阶拉格朗日方程

黄沛天[1]，　徐学翔[2]，　马善钧[2]

(1.江西师范大学 离退休工作办公室,江西 南昌　330027;2.江西师范大学 物理与通信电子学院,江西 南昌　330027)

**摘要**:三阶拉格朗日方程可以用来描述电流猝变运动.该文将磁 Appell 函数替代加速度能量,得到了关于磁 Appell 函数的三阶拉格朗日方程,然后用它求得了一种 RL 电路暂态过程的电流急动度函数.

**关键词**:三阶拉格朗日方程;磁 Appell 函数;电流急动度函数

**中图分类号**:O 441;O 316　　　**文献标识码**:A

文献[1]根据变加速动力学中的急动度、力变率、加速度能量等概念,对某种 RL 电路的暂态过程泛化引伸出了电流急动度函数、感应电动势的时间变率和磁 Appell 函数等概念.是否还可以对该过程再做点有意义的泛化和引伸呢? 本文想就此适当做点补充.

## 1　关于磁 Appell 函数的三阶拉格朗日方程

众所周知,由于分析力学立足于广泛意义的能量概念,同时还兼用了广义坐标、广义速度、广义力等宽泛的概念,因此,分析力学的方法和结论往往也可以用于物理学的其他领域.文献[2]给出了完整系统关于广义速度的拉格朗日方程(简称“三阶拉格朗日方程”)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S}{\partial \dddot{q}_\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\alpha}=Q_\alpha^* \quad (\alpha=1,2,\cdots n), \tag{1}$$

式中的 $S,\dot{q}_\alpha,\ddot{q}_\alpha$ 和 $Q_\alpha^*$ 分别为加速度能量、广义速度、广义加速度和广义力变率.这是变加速动力学中的分析力学基本方程.

文献[1]在引伸出感应电动势的时间变率的同时,从基尔霍夫第二定律出发,求得了某种 RL 电路暂态过程的电流急动度函数,给出了相应的磁 Appell 函数定理,并且将加速度能量概念扩大为具有广泛意义的 Appell 函数(包括加速度能量和电磁 Appell 函数)概念.这就启发人们可以用磁 Appell 函数替换三阶拉格朗日方程中的加速度能量态函数,用电流和电流的时间变率替换方程中的广义速度和广义加速度,而广义力变率则用感应电动势的时间变率来替换.由此可以得到一个以磁 Appell 函数为态函数的三阶拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial A_m}{\partial \ddot{I}}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_m}{\partial \dot{I}}=\dot{\varepsilon}_i, \tag{2}$$

式中的 $A_m,I,\dot{I}_i$ 和 $\dot{\varepsilon}_i$ 分别为载流线圈 $L$ 的磁 Appell 函数、电流、电流的时间变率和感应电动势的时间变率.

## 2　简单应用

文献[1]在求出了由电阻 $R$、无内阻的理想线圈 $L$、理想电池 $\varepsilon$ 和开关 $K$ 构成的简单回路接通时的暂态过程电流 $I=I_m[1-\exp(-R/L)t]$ 之后,直接将电流对时间求两次微商便得到电流急动度函数

$$j=\dddot{q}=\ddot{I}=-(I_mR^2/L^2)\exp(-R/L)t, \tag{3}$$

式中 $I_m=\varepsilon/R$ 为暂态过程最后达到的稳定电流值.

现在应用(2) 式也可以求得该暂态过程电流急动度函数:对于(2) 式的左边有

**收稿日期**:2007-05-21

**作者简介**:黄沛天(1940-),男,江西吉安人,教授,主要从事力学研究.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{I}}\left(\frac{1}{2}L\dot{I}^2\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{I}}\left(\frac{1}{2}L\dot{I}^2\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\dot{I})=L\ddot{I},\tag{4}$$

而将该暂态过程的基尔霍夫第二定律表述式 $\varepsilon-\varepsilon_i=IR$ 对时间求微商之后可得(2)式的右边为

$$\dot{\varepsilon}_i=-R\dot{I}=-(I_mR^2/L)\exp(-R/L)t.\tag{5}$$

因此,由(2)、(4)、(5)式可求得与(3)式完全一致的结果:$j=\ddot{I}=-(I_mR^2/L^2)\exp(-R/L)t$.

## 3 结论与展望

综上所述,虽然三阶拉格朗日方程是描写变加速运动的基本方程,但是如果将态函数(加速度能量)扩充为普遍的 Appell 函数,那么该方程可以用来描写其他的物理学问题.

这里需要指出,三阶拉格朗日方程只是一种特殊的三阶微分方程,而由一般急动度函数构建的猝变动力学[3-5],则是更为宽泛的三阶微分方程形式,它对三维混沌流的描写有着特殊的意义[6-7].三阶拉格朗日方程和猝变动力学的问世,表明三阶微分方程正在逐渐走出数学的水晶宫,成为人们眺望物理现实世界的新窗口.然而大量存在的变加速运动和各种猝变运动问题并不会自动进入人们的视野,这就需要各个领域的有心人用急动度、三阶微分方程和 Appell 函数等概念主动去捕捉这类问题.当然,机遇也自会偏爱有心人.

**参考文献:**

[1]黄沛天,徐学翔,马善钧,等.电磁猝变动力学的几个基本概念[J].科技导报,2007,25(3):74-77.
[2]梅凤翔,刘端,罗勇.高等分析力学[M].北京:北京理工大学出版社,1991:251.
[3]Linz SJ. Nonlinear dynamical models and jerky motion[J].Am J Phys,1997,65:523-526.
[4]Sprott J C. Some simple chaotic jerk function[J]. Am J Phys,1997,65:537-543.
[5]Linz S J. Newtonian jerky dynamics: some general properties[J]. Am J Phys,1998, 66:1 109-1 114.
[6]Eichhorn R,Linz S J,Hanggi P. Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows [J]. Phy Rev,1998,E58:7 151-7 164.
[7]黄沛天,徐学翔,马善钧.试论混沌和急动度之关系[J].江西师范大学学报:自然科学版,2006,30:43-46.

# A Three-Order Lagrange Equation Relating to Magnetic Appell Function

HUANG Pei-tian[1], XU Xue-xiang[2], MA Shan-jun[2]
(1.Department of Service to Retire Office, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027,China;
2.College of Physics and Communication Electronics,Jiangxi Normal University, Nanchang 330027,China)

**Abstract**: The jerky motion of electric current may be described by three-order Lagrange equation. In this paper, acceleration energy is replaced with magnetic Appell function. A three-order Lagrange equation relating to magnetic Appell Function is obtained, and then jerk function on electric current in a transient process of RL circuit is solved by the three-order Lagrange equation.

**Key words**: three-order Lagrange equation; magnetic Appell function; jerk function on electric current

(责任编辑:冉小晓)