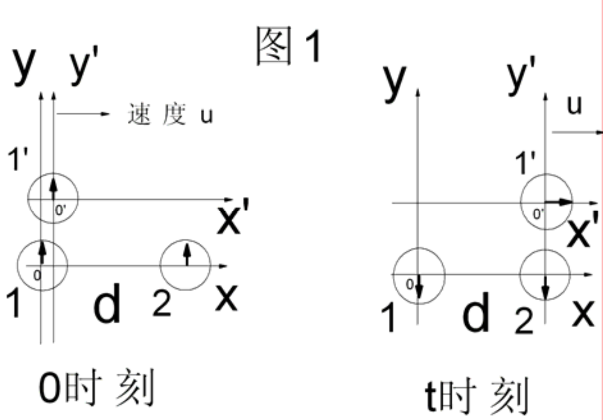
“动钟变慢”的相对性

所谓“ 动钟变慢 ”的相对性是指如果惯性系 S 相对于惯性系S'有相对运动，那么在 S 系的观测者看来，S'系的钟因为运动而变慢了。反过来，S'系的观测者也认为 S 系的钟因为运动变慢了。如下是这种效应的定性和定量的分析。

定性分析:

S系的观测者的观点：

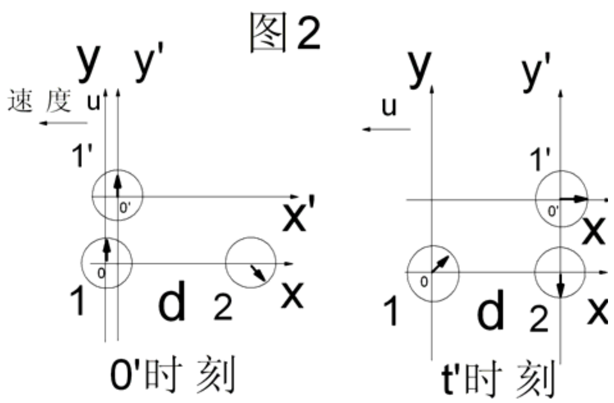


初始时刻（0 时刻），S 系和S'系的坐标原点重合，S'系相对于 S 系以速度 u 向正方向运动。此时，S 系的所有时钟都指向 0，S'系中在坐标原点的时钟$1'$指向 0。

t时刻，S'系的坐标原点$0'$运动到S系中的d处。此刻，S系所有的时钟都指向 180°处，S'系原点的时钟指向 90°（如图 1)。

综上， S 系的观测者说，本系的时钟走过了 180°但S'系的钟只走过了 90°。S'系的时钟因为运动变慢了！

S'系的观测者的观点：



初始时刻（0 时刻），S'系和S系的坐标原点重合，S系相对于S'系以速度u向负方向运动。此时，S'系的所有时钟都指向 0。S系中仅在坐标原点的钟 1 指向 0，S'系的观测者认为S系的时钟不同步，此刻S系中d处的钟 2 指向 135°处（并非指向 0，与S系的观察者观点不一致） [下面会有定量的分析]。

t'时刻， S系的d点运动到S'系的坐标原点。此刻，S'系所有的时钟都指向 90°处， S 系的钟 2 指向 180°，钟 1 指向 45°（如图 2）。

综上，S'系的观测者认为，本系的时钟走过了 90° 但是 S 系的钟只走过了 45°（= 180°-135°= 45°-0°），S系的时钟因为运动变慢了！

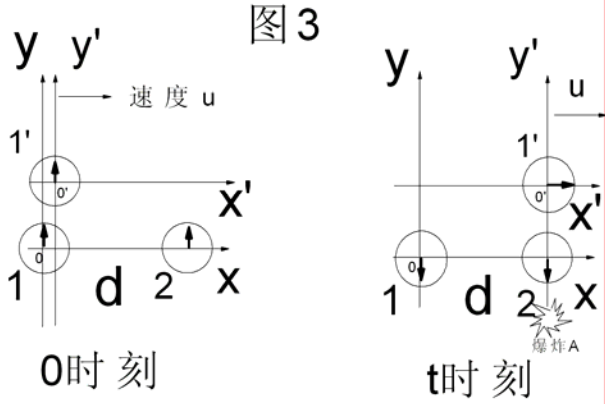
定量分析（用洛伦兹变换）：

假设两个惯性系相对运动的速度$u=\frac{\sqrt{3}}{2}c$。

下面分析中将考察 S 系原点的钟 1 和 d 点（x=d）钟 2，S'系原点的钟$1'$。

S系的观测者的观点：

图 3



0 时刻，钟 1 和 2 的读数为 0。钟$1'$此刻位于 S 系的原点，读数也是 0。

t 时刻（钟 1 和 2 的读数都是t），S'系的原点运动到 S 系的 d 点处，钟 2 和钟$1'$在空间上重合，此时此地发生了爆炸 A，这个事件在 S 系的时空坐标是（d ,t），在S'系的时空坐标是（0，t'），t'就是钟$1'$的读数。

根据洛仑兹变换，

$$\underset{S系}{(d,t)}\ \underset{逆变换}{\overset{洛伦兹变换}{\rightleftarrows}}\ \underset{S'系}{(0,t')}$$

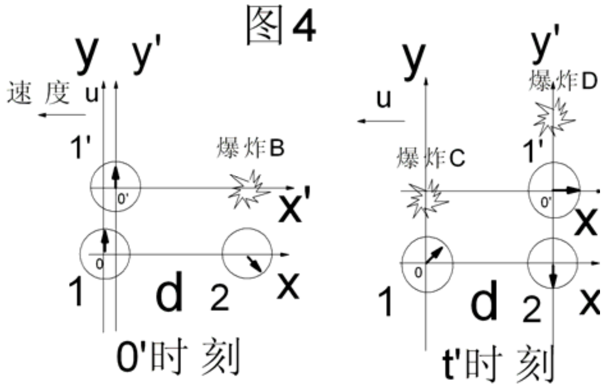
$$t'=\frac{t-\frac{u}{c^2}d}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad 其中\ d=u*t \qquad 则\ t'=\frac{1}{2}t$$

将$t=\frac{d}{u}$定义为钟指向 180° ，则t'指向 90°。

经过时间t，S系的时钟走过了 180°，而S'系的时钟只走过了 90°。S系中的观测者的结论是：S'系中的时钟慢了一半。

S'系的观测者的观点：

图4



$0'$时刻，S'系的钟读数都为 0。钟 1 此刻位于S'系的原点处，读数也设为 0。S'系的观测者认为 S 系的时钟不同步，钟 2 此刻读数为t_{II}。假设此刻在 S 系的 d 处（S'系的 d ’ 处）发生爆炸 B，这个事件在 S 系的时空坐标为(d,t_{II}) ,在S'系的时空坐标为$(d',0)$。

根据洛伦兹变换

$$(d,t_{II})\underset{\text{逆变换}}{\overset{\text{洛伦兹变换}}{\rightleftarrows}}(d',0) \qquad d=\frac{d'+0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=2d' \qquad t_{II}=\frac{0+\frac{u}{c^2}d'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{3}{4}\frac{d}{u},$$ 指向135°。

S系　　　　S'系

t'时刻，钟 1 运动到S'系$-d'$处，此时此地发生爆炸C。这件事在S系的时空坐标是（0，t_I），在S'系的时空坐标是($-d'$，t')，　$t'=\dfrac{d'}{u}=\dfrac{\frac{1}{2}d}{u}$,指向 90°。

根据洛仑兹变换　$(0,t_I)\underset{\text{逆变换}}{\overset{\text{洛伦兹变换}}{\rightleftarrows}}(-d',t')$

S系　　　　S'系

$$t_I=\frac{t'+\frac{u}{c^2}(-d)'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{\frac{1}{2}\frac{d}{u}-\frac{u}{c^2}d'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{1}{4}\frac{d}{u}$$　钟t_I此刻指向 45°。

此刻，钟 2 运动到S'系的原点，与钟$1'$在空间上重合，此时此地发生爆炸 D。【注意爆炸 D 和爆炸 A 是同一个事件】

$(d, t_{III}) \underset{\text{逆变换}}{\overset{\text{洛伦兹变换}}{\rightleftarrows}} (0, t')$ $\quad t_{III} = \dfrac{t' + 0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ $\quad t_{III} = 2t' = \dfrac{d}{u}$ 钟 2 此刻指向 180°。

S系 $\qquad\qquad$ S'系

经过时间t'，S'系的时钟走过了 90°，而S系的时钟只走过了 45°(=180°-135° = 45°-0°)。综上，S'系中的观测者的结论是：S系中的时钟慢了一半。

胡锋　于 2008-2-18