自由振动的另一种解法

陈奎孚

（中国农业大学应用力学系，北京 100083）

摘要: 大多物理教材和振动教材都采用如下方式求解自由振动: 将解假定为三角函数的形式，代入微分方程得到固有频率方程。这种方法固然简单，但是总会让学生觉得是否还有其他形式解。本文梳理了对方程两次积分的解法，它消除了上述疑虑。

关键词: 振动; 自由振动; 常微分方程

中图分类号: O325

An Alternative Approach to Free Vibration

Kui Fu Chen

(Applied Mechanics Department, China Agricultural Univeristy, Beijing 100083)

Abstract: The following approach was used to analyze the homogeneous ordinary difference equation (ODE) for free vibration in most textbooks of physics and vibration: the solution was postulated to a triangular function, and substituting the postulated solution into the ODE arrives to an algebra equation with respect to the natural frequency. This approach cast a doubt on whether there are any other forms of solutions, though it is very concise. An alternative approach is compiled, which is based on double integrations to the ODE. It can eliminate the above doubt.

Key words: Vibration; Free Vibration; Ordinary Differential Equation

0 引言

振动分析在数学、物理和振动等课程中反复出现，其中的自由振动的齐次方程求解一般采用三角函数假设法。本文将总结出基于两次积分的方法，相对于前者，理论上有一定的优越性。

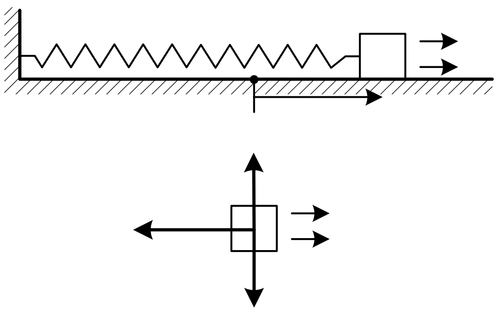

图 1 质量块受力分析

1 传统解法

图 1的振动微分方程为

作者简介: 陈奎孚(1969-)，男，副教授，主要研究方向：振动，植物力学. E-mail: ChenKuiFu@cau.hotmail.com

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1}$$

为了求解这个方程，大多数教材的做法是[1,2,3]：假定解为

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{2}$$

代入方程(1)得到

$$(-m\omega^2+k)A\sin(\omega t+\varphi)=0$$

约去不为零的 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 得到如下频率方程

$$-m\omega^2+k=0 \tag{3}$$

解之得到自由振动频率(固有频率)

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

式(2)中其他两个参数 A,φ 根据再初始条件确定。

上述的解法最终得到的结果一般是正确的。但是在心理上，我们总会想这种假定合理吗？是不是还有其它解的形式呢？

如果细究起来，上述的假设解方法也并非无懈可击。比如 $k=0$，由式(4)有 $\omega=0$，再代入式(2)得到

$$x(t)=A\sin\varphi$$

这就是说质量块的位移不随时间变化，即静止不动。但是我们知道图 1 的弹簧没有时，质量块可做匀速运动。

对这种情形，假设解的思路会声明 $k=0$ 的方程(3)有两个重根，假设解(2)是不合理。对有重根情形，假设解应该为

$$x(t)=A_1+A_2t$$

如此做法当然会令深思的学生进一步想，究竟什么时候应该假定什么样形式的解。这固然能促进学生深入思考，但是总感觉不完美。

2 两次积分的解法

下面从另外一个思路求解方程(1)。

2.1 第一次积分

将方程(1)等号两边同乘以速度 $\dot{x}$。注意到 $m\ddot{x}\dot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$，$kx\dot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$，方程(1)就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0 \tag{5}$$

这里括号内第一项 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 就是物块所拥有的动能，而第二项 $U=\frac{1}{2}kx^2$ 就是弹簧所储存的势能。物块动能与弹簧势能的总和就是系统机械能 E。因为这里没有考虑耗损，所以机械能守恒，即表现为 $T+U=E$ 不随时间变化，这就是式(5)的物理意义。

去掉式(5)括号外面的求导运算，可以得到

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

右端的系统机械能 E 总是非负。上式可以进一步变为

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} \tag{6}$$

下面分两种情况讨论：

2.2 情形一：$k \neq 0$

利用 $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，将显含时间 t 的项移到式(6)右边，而不显含 t 的项移到左边有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{d}t \tag{7}$$

式中 $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ 的物理意义是 m 可偏离平衡位置的最大值 $|x_{\max}|$，它也就是质量块振动起来的振幅。因为 m 达到最大振幅时，速度变为 0，机械能 E 就剩下弹簧的势能 $U_{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$，从而 $A = |x_{\max}|$。

对式(7)两边积分得到

$$\arcsin\frac{x}{A} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t + C$$

其中 C 是与振动初相位有关的积分常数。上式可整理成

$$x = x(t) = A\sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}t + C\right)$$

根据三角函数的性质，上式 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 前面的正负号可以与积分常数 C 结合，这样它就可以写为标准的正弦函数(图 2)

$$x(t) = A\sin(pt + \alpha) \tag{8}$$

其中 α 为物块振动的初相位，而 p 为系统固有圆频率，它与系统参数的关系为

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9}$$

利用 p 可以将式(1)变换成首项系数为 1 的标准形式，即

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{10}$$

此即单自由度系统无阻尼自由振动的标准微分方程。

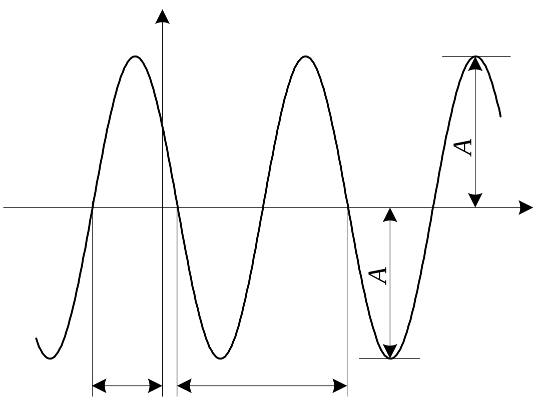

图 2 正弦波时间历程

2.3 情形二：$k=0$

式(6)退化为

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

可得

$$x(t)=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}}t+C \tag{11}$$

其中C为积分常数。

弹簧$k=0$对应势能恒为 0，E就是系统的动能，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

代入式(11)得到

$$x(t)=\pm vt+C$$

即物体发生匀速运动。

参考文献

1. 陈奎孚. 机械振动基础[M]. 北京:中国农业大学出版社, 2011 年 12 月.
2. 谢官模. 振动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
3. 胡海岩. 机械振动基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005.