两自由度系统重频的充要条件

陈奎孚　王永岗
（中国农业大学应用力学系-东区 74#， 邮编　100083）

摘要　证明了两自由度系统出现重频的充要条件：质量矩阵的各元素与刚度矩阵的相应元素之比相等。指出两自由度重频系统本质上就相当于相当于两个独立振动系统。

关键词：振动，重频，振型，两自由度系统。

很多振动教材都有重频这一部分内容[1-3]，这是因为振型正交性是振型迭加法的前提。若出现重频，任意选择的振型不能保证正交，因而还需要额外的正交化步骤。在工程实际中，具有准对称结构或局部准对称子结构的系统时常出现密集或重频。从数值计算角度而言，重频存在容易导致模态遗漏，甚至出现计算困难；在另一方面，模态分析中涉及重频和密频的模态难于准确估计[4]。

本文证明了两自由度系统出现重频的充要条件：质量矩阵的各元素与刚度矩阵的相应元素之比相等。进一步指出两自由度重频系统本质上就相当于相当于两个独立振动系统。

一、充要条件

两自由度振动系统的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

这里: x_1, x_2 是对应于系统的两个广义坐标;$m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ 为系统的四个等效质量; $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ 为系统的四个等效刚度。一般来说，我们可以假定：$m_{11}>0, m_{22}>0$; $k_{11}>0, k_{22}>0$; $m_{12}= m_{21}, k_{12}=k_{21}$;质量矩阵正定,也就是

$$m_{11}m_{22}-m_{12}^2>0 \tag{2}$$

方程(1)的特征方程为

$$\left(-\lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

这里:λ为特征值;$\{X_1, X_2\}^{\mathrm{T}}$ 为特征向量或振型。式(3)存在非零解的条件是系数行列式为 0,也就是

$$\left| -\lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right| = 0 \tag{4}$$

展开后有

$$(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})\lambda^2 - \lambda(m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} + m_{12}k_{21} + m_{21}k_{12}) + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0 \tag{5}$$

这个二次方程的判别式为

$$\Delta = (m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} + 2m_{12}k_{21})^2 - 4(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) \tag{6}$$

利用质量矩阵和刚度矩阵的对称性 $m_{12}= m_{21}, k_{12}=k_{21}$，这个判别式可进一步变为

$$\Delta = [(-k_{11}m_{22}m_{11}+k_{22}m_{11}^2+2m_{12}^2k_{11}-2m_{12}m_{11}k_{12})^2+4(-m_{12}k_{11}+m_{11}k_{12})^2(m_{11}m_{22}-m_{12}^2)]/m_{11}^2 \tag{7}$$

由式(2)可知式(6)右边分子的两项都非负。重频条件是Δ=0, 所以必须有

$$\left.\begin{array}{l} -k_{11}m_{22}m_{11}+k_{22}m_{11}^2+2m_{12}^2k_{11}-2m_{12}m_{11}k_{12}=0 \\ -m_{12}k_{11}+m_{11}k_{12}=0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

由第二个方程可以得到

$$m_{12}/k_{12}=m_{11}/k_{11} \tag{9}$$

将这个关系代入(8)式第一个方程得到

$$m_{22}/k_{22}=m_{12}/k_{12}=m_{11}/k_{11} \tag{10}$$

这样就得到了两自由度系统重频的充要条件：**质量矩阵的各元素与刚度矩阵的相应元素之比等于常数**，也就是

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}=\omega_n^2\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{11}$$

这里的ω_n就是系统的固有频率。

二、另一种诠释

因为质量矩阵$[M]$对称正定,我们总可以找到使它对角化的正交矩阵的相似变换$[P]$使

$$[Q]^T\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}[Q]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

取变换$\{y_1,y_2\}^T=[Q]^T\{x_1,x_2\}^T$代入式(1),并左乘$[Q]^T$有

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix}=[Q]^T\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}[Q] \tag{14}$$

这种正交变换不改变系统固有频率，系统(1)的固有频率就等于系统(13)的固有频率。后者固有频率方程是

$$(\tilde{k}_{11}-m_1\omega_n^2)(\tilde{k}_{22}-m_2\omega_n^2)-\tilde{k}_{21}\tilde{k}_{12}=0 \tag{15}$$

它存在重根的充要条件是:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{k}_{21}=\tilde{k}_{12}=0 \\ \tilde{k}_{11}/m_1=\tilde{k}_{22}/m_2=\omega_n^2 \end{array}\right\} \tag{16}$$

这样就有

$$\omega_n^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}=[Q]^T\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}[Q] \tag{17}$$

与(12)式相比较,并注意到$[Q]$是可逆矩阵,同样可以导出(11)式。

三、举例

图 1 所示为常见的弹簧质量块系统,容易写出刚度矩阵和质量矩阵,他们分别为

$$[K]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

根据前面充要式条件有(11)，这个系统存在重频条件是 k_2=0，且 k_1/m_1= k_3/m_2。这实际上就是两个具有相同频率独立的振子。

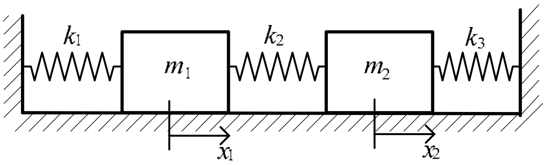

图1　两自由度弹簧质量块系统

图 2 是文献[3]使用的例子，这里刚性联杆 l 的质量不计，一般采用两个质量的位移 x_1 和 x_2 为广义坐标。相应自由振动方程为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1+kx_1=0 \\ m\ddot{x}_2+kx_2=0 \end{aligned}\right\}$$

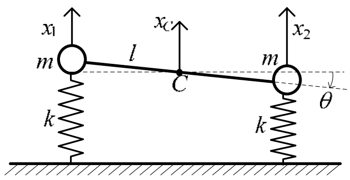

图2　文献[3]使用的例子

这相当于两个完全相同，且没有任何耦合的振动系统(中间的刚杆可以取消)。因而与图 1 的重频情形没有本质的区别。

当然图 2 这个系统的两个广义坐标也可以选择为:联杆中心 C 的位移 x_c 与联杆的转角 θ。 相应的振动方程为，

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_c+ml\ddot{\theta}/2+kx_c+kl\theta/2=0 \\ m\ddot{x}_c-ml\ddot{\theta}/2+kx_c-kl\theta/2=0 \end{aligned}\right\}$$

它在形式上感觉复杂了一些。

总之，由弹簧-质量块构成的两自由度重频系统在本质上就是相当于两个独立振动系统。

参　考　文　献

1　李惠彬. 振动理论与工程应用. 北京: 北京理工大学出版社. 2006.

2　许本文, 焦群英. 机械振动与模态分析基础. 北京: 机械工业出版社. 1998.

3　郑兆昌. 机械振动(上册). 北京: 机械工业出版社. 1980.

4　刘中生, 王大钧, 胡海昌. 重频模态可控可观性的度量与主模态概念. 力学学报, 1994, 26(4): 424-431.