单自由度系统的特殊频率

陈奎孚
中国农业大学应用力学系

摘要 本文将介绍单自由度系统的位移共振频率、速度共振频率、位移谐振频率、无阻尼固有频率、阻尼固有频率、半功率点等特殊频率。

1. 三种频响

图 1 所示的单自由度系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t) \tag{1}$$

它的特性往往用更直观地用幅频特性(图 2)和相频特性来刻画。幅频特性和相频特性也可以合起来用如下复函数—复频特性—全部表示出来

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{m(\mathrm{j}\omega)^2+c(\mathrm{j}\omega)+k} \tag{2}$$

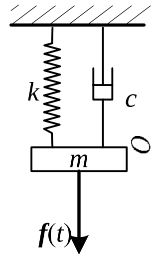

图 1 单自由度系统

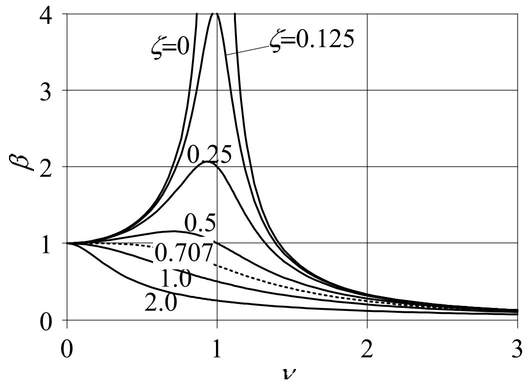

图 2 幅频特性曲线

横坐标ν为激励频率与固有频率之比，纵坐标β为放大系数。

上述幅频特性、相频特性和复频特性都是指位移的信息。工程上也经常直接测量速度和加速度。为了区别起见，可称为速度响应和加速度响应，而不特别指明的响应就是位移响应。

速度复频响函数 $H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{V}{f_0}=\mathrm{j}\omega\frac{1}{m(\mathrm{j}\omega)^2+c(\mathrm{j}\omega)+k}=\mathrm{j}\omega H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega) \tag{3}$$

这里 $H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)$ 就是式**(2)**的位移频响函数，为了区别起见，加了角标 D(displacement)。

加速度频响函数 $H_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$H_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{(\mathrm{j}\omega)^2}{m(\mathrm{j}\omega)^2+c(\mathrm{j}\omega)+k}=\mathrm{j}\omega H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)=(\mathrm{j}\omega)^2 H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega) \tag{4}$$

速度频响和加速度频响也有各自的相频特性函数。

2. 共振频率

振动分析的一个基本目的就是避免共振(或谐振)，因而需要研究共振发生的条件和特性。共振就是当激励频率接近固有频率，系统响应急剧增大的现象。依赖于工程目的和测量的经济性，所感兴趣的响应既可能是位移，也可能是速度或加速度，相应的共振就有位移共振、速度共振和加速度共振之区别。速度共振的特征在数学上相对简单，因此我们先分析这种情形。

式(3)给出速度频响函数，类似于位移情形的放大倍数，我们讨论速度频响函数的模，

$$|H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)|=\left|\frac{\mathrm{j}\omega}{m(\mathrm{j}\omega)^2+c(\mathrm{j}\omega)+k}\right|=\frac{1}{\sqrt{mk}}\frac{|\nu|}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+(2\zeta\nu)^2}} \tag{5}$$

图 3 给出了一簇$|H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)|$曲线，其轮廓大体与图接近(特别是在共振区附近)。图中

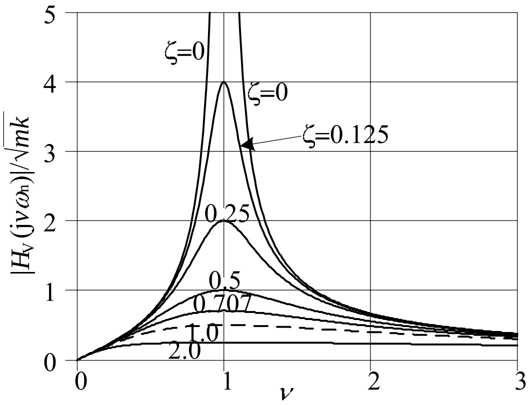

图 3 速度频响的幅值

$\zeta<1$的五条曲线均在$\nu=1$时取得极大值，表明在该条件下出现速度共振，即若激振力的幅度保持恒定而改变激振频率ω，当ω等于固有频率p ($\nu=1$)，速度响应的幅值最大。这可严格论证如下。

式(5)可变换为

$$|H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{mk}}\frac{1}{\sqrt{(\nu-\nu^{-1})^2+(2\zeta)^2}}$$

$|H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)|$的最大值对应右端第二个分式分母的最小值，后者最小值条件为

$$\nu_{\mathrm{m}}-\nu_{\mathrm{m}}^{-1}=0$$

可以解出

$$\nu_{\mathrm{m}}=\pm 1$$

其中-1 解是位于负半轴那一个极值，应舍去。这样就证明了速度共振频率

$$\omega_{\mathrm{V,r}}=p \tag{6}$$

位移共振频率对应图的极大值点。$|H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)|$的频率无量纲化为

$$|H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+(2\zeta\nu)^2}} \tag{7}$$

进一步可变为

$$|H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\nu^4-2(1-2\zeta^2)\nu^2+1}}$$

$|H_D(j\omega)|$的最大值对应右端方根号内项最小值。后者当

$$\nu_m = \pm\sqrt{1-2\zeta^2}$$

取得极小。同样我们舍去负号，得到位移共振条件

$$\omega_{D,r} = \sqrt{1-2\zeta^2}\,p \tag{8}$$

加速度$|H_A(j\omega)|$的频率无量纲化为

$$|H_A(j\omega)| = \frac{1}{m}\frac{\nu^2}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+(2\zeta\nu)^2}} \tag{9}$$

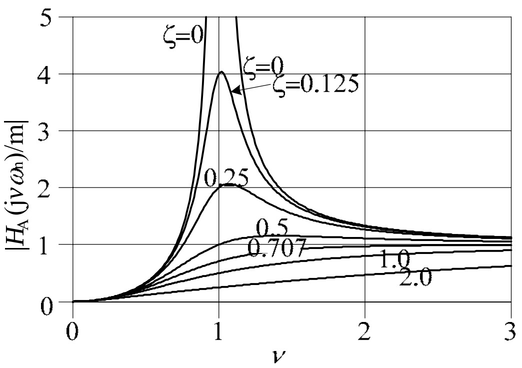

图 4 加速度幅频响应

图 4 表明，加速度共振频率应大于无阻尼固有频率。为了寻找其表达式，可将(9)变为

$$|H_A(j\omega)| = \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{1-2(1-2\zeta^2)\nu^{-2}+\nu^{-4}}}$$

因此极大值条件(去掉负解)

$$\nu_m = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

这样得到加速度共振频率

$$\omega_{A,r} = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}\,p \tag{10}$$

除了位移共振频率$\omega_{D,r}$,速度共振频率$\omega_{V,r}$和加速度共振频率$\omega_{A,r}$外，还有无阻尼固有频率$p=\sqrt{k/m}$，阻尼固有频率$p_d = p\sqrt{1-2\zeta^2}$。若阻尼等于零，这五个特征频率完全相同，都等于p。若阻尼比不为零，五者之间有差异，这表现在图 5 中。很多工程问题的阻尼比ζ都小于 0.1,此时五个频率可互相替代；但对高阻尼系统，必须注意他们之间的区别。

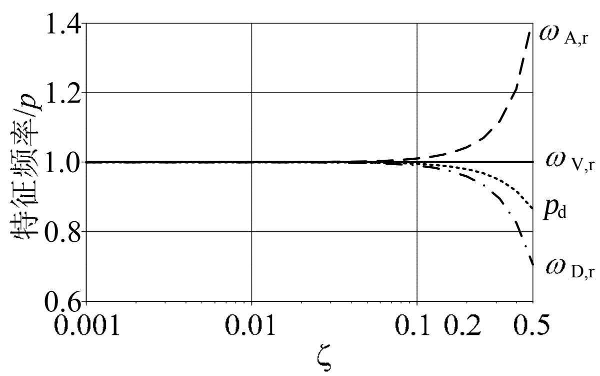

图 5 单自由度特征频率随阻尼的变化

3. 半功率点与半功率带宽

半功率点概念在工程上经常被使用。我们先检查速度幅频特性(5)式。把速度共振条件(6)式代入(5)式得到速度共振因子(图 4 中每条曲线的最大值)

$$Q = |H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{V,r}})| = \frac{1}{\sqrt{mk}}\frac{1}{2\zeta} \tag{11}$$

取出图中一条曲线重新表示在图 6 中，然后在 $\frac{Q}{\sqrt{2}} \approx 0.707Q$ 高处作一水平线，交幅频曲线于 P_1和P_2 两点，该两点称为半功率点。在半功率点之内的幅频曲线大体以共振频率对称。

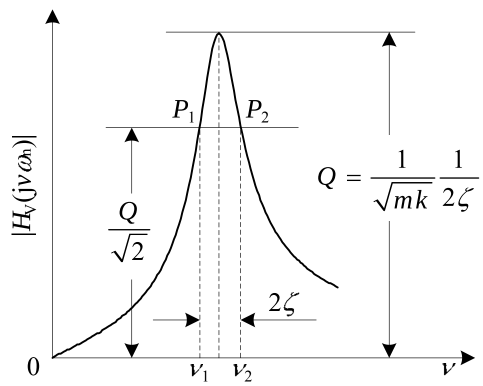

图 6 半功率点

可以利用这对半功率点测量阻尼比。这是因为对应于半功率点，可由式(5)和(11)得到

$$\frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{mk}}\frac{1}{2\zeta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{mk}}\frac{\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+(2\zeta\nu)^2}}$$

由上式可解出：$\nu_1 = -\zeta + \sqrt{1+\zeta^2}$，$\nu_2 = \zeta + \sqrt{1+\zeta^2}$ (两个负解舍去)。这样 P_1和P_2 对应频率为

$$\begin{cases} \omega_1 = \nu_1 p = (-\zeta + \sqrt{1+\zeta^2})p \\ \omega_2 = \nu_2 p = (+\zeta + \sqrt{1+\zeta^2})p \end{cases} \tag{12}$$

两半功率点所对应的频率之差

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \tag{13}$$

称为系统的半功率带宽。

由(12)式有

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2p} \tag{14}$$

若由试验得到幅频特性曲线，测出两个半功率点，就可以由上式估算系统的阻尼比。

图 6 是幅度关系，而功率与做功有关，线性系统所涉及的功与幅度平方成正比。当把它变成幅度平方关系后，$\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right)^2$ 就恰好为最高点 Q^2 的一半了。这就是半功率点名称的意义。此外, 半功率点所对应的响应，振系阻尼在一周期内所消耗的能量，也恰好为共振条件所消耗能量的一半。

有时候，功率图用分贝来表示，这时

$$10\lg\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right)^2 = 10\lg Q^2 - 10\lg 2 \approx 10\lg Q^2 - 3.01 \approx 10\lg Q^2 - 3$$

因此有时把半功率点也说成是功率下降到 3dB 点。

4. 位移和加速度的半功率点

以上讨论针对速度幅频。将(5)与(7)相比较可知，

$$|H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)| = \omega^{-1}|H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)| \tag{15}$$

对小阻尼系统，半功率带宽$\Delta\omega$很小，即在半功率带宽内，式(15)右边ω^{-1}可以认为是一个常数。这样在半功率带宽附近的$|H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega)|$与$|H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)|$之间的形状差异几乎可忽略。所以上述对速度精确成立的半功率点法也可以用于位移幅频曲线。

将式(5)与式(9)相比较有，

$$|H_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}\omega)| = \omega|H_{\mathrm{V}}(\mathrm{j}\omega)| \tag{16}$$

同样可知半功率点法也可以用于加速度幅频曲线。

更精确的分析如下。

4.1 位移

将式(8)代入式(7)可得

$$|H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{D,r}})| = \frac{1}{k}\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{17}$$

半功率的要求为

$$\frac{|H_{\mathrm{D}}(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{D,r}})|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{2}2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+(2\zeta\nu)^2}}$$

可解出半功率点为(负解舍去)

$$\nu_1 = \sqrt{1-2\zeta^2-2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\nu_2 = \sqrt{1-2\zeta^2+2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

从而有

$$\begin{aligned}\nu_2-\nu_1 &= \sqrt{1-2\zeta^2+2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} - \sqrt{1-2\zeta^2-2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= 2\zeta + 2\zeta^3 + O(\zeta^5)\end{aligned} \tag{18}$$

对小阻尼情形，上式第二项之后都小量，因而可近似估计阻尼比。

4.2 加速度

将式(10)代入式(9)可得

$$|H_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{1-(1-2\zeta^2)^2}} = \frac{1}{m}\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

半功率的要求为

$$\frac{|H_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{A,r}})|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{1-(1-2\zeta^2)^2}} = \frac{1}{m}\frac{\nu^2}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+(2\zeta\nu)^2}}$$

可解出半功率点为(负解舍去)

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2+2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2-2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

从而有

$$\begin{aligned} \nu_2 - \nu_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2-2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2+2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ &= 2\zeta + 10\zeta^3 + O(\zeta^5) \end{aligned} \tag{19}$$

对小阻尼情形，上式后两项也同样是小量。

参考文献

1. 陈奎孚. 机械振动基础. 北京:中国农业大学出版社, 2010 年 12 月.