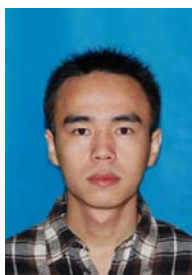


# 空间网络综述<sup>1</sup>

黎勇<sup>2</sup>, 胡延庆, 张晶, 狄增如

(北京师范大学管理学院系统科学系, 北京 100875)



**摘要:** 复杂网络是研究复杂系统中大量元素间相互作用的重要工具。近十年来, 复杂网络研究取得了许多重要的进展。空间网络是一类特殊的复杂网络。与一般网络相比, 空间网络中的每个顶点都有自己的空间地理位置, 而这种空间地理位置在顶点之间的相互作用中有重要意义。本文将对空间网络上的导航能力, 同步能力和疾病传播相关方面的一些重要成果做一个简单介绍。

**关键词:** 复杂系统, 空间网络, 导航

中图分类号: N94

文献标识码: A

## Review on Spatial Networks

LI Yong HU Yanqing ZHANG Jing DI Zengru

(Department of systems, School of Management, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

**Abstract:** Complex network is an important tool which can help us describe and study complex systems well. During the last decade, scientists have made great progress on the research of complex networks. Spatial network is a special kind of complex networks. Compared with other complex networks, each node in spatial networks has a geographical location which can play a non-trivial role. In this paper, we will review some important dynamical progress on spatial networks, such as epidemical spreading, navigation and synchronization.

**Key words:** Complex Systems, Spatial networks, Navigation

## 1. 引言

网络科学发展了研究复杂系统中大量元素之间相互作用的方法, 具有重要的科学意义。在传统的研究方法中, 许多系统被简化为规则的空间晶格结构, 系统中元素只与其邻域中元素发生作用。复杂网络的研究发展了利用网络拓扑结构描述复杂系统中元素相互作用的方法, 使得人们能够更加准确有效地对复杂系统内部或者复杂系统之间的作用进行描述。由于复杂网络在描述复杂系统上的灵活性和有效性, 近十年来网络科学一直成为复杂性研究的热点, 并且取得了许多重要成果, 加深了人们对自然界和人类社会的认识。

复杂网络研究可以追溯到半个世纪以前, 著名数学家 Erdos 和 Renyi 在 1959 年前后就始从概率的角度研究了由大量顶点和边构成的复杂图的统计性质<sup>[1,2]</sup>。Watts 和 Barabasi 等在 10 多年前揭示出

---

1 本文受《复杂系统与复杂性科学》期刊邀请所写, 得到国家自然科学基金项目 (No. 60974084), 北京师范大学优秀博士论文基金, 北京师范大学自主科研基金和教育部博士研究生学术新人奖基金支持。全文在胡延庆的组织安排下完成, 联系方式为:

yanqing.hu.sc@gmail.com。

2 作者简介: 黎勇 (1987-), 男, 四川人, 硕士研究生, 主要研究方向为复杂网络、金融工程。

很多实际系统构成的网络具有普适的小世界和无标度特征后<sup>[3,4]</sup>, 复杂网络便成为复杂性研究、统计物理和很多交叉学科研究的重要内容<sup>[5]</sup>。国内同行在复杂网络研究上也取得了丰富的成果<sup>[6,7]</sup>, 在复杂网络的结构理论<sup>[8,9,10]</sup>、动力学过程<sup>[11,12,13,14]</sup>以及应用<sup>[9,12,15,16]</sup>等多个重要方面都做出了重要贡献。

复杂网络的拓扑结构能够反映许多实际系统的重要性质, 如 www、科学家合作网、蛋白质作用网、食物链网等, 相关研究揭示了复杂系统中的一些普适性质, 如小世界、无标度、社团结构、自相似性等。与统计物理中用空间结构规则均匀的晶格网络描述系统方法不同, 复杂网络研究中通常忽略系统元素的空间位置在系统中的作用。然而, 自然界中大部分复杂系统中元素间的相互作用应该是介于二者之间。诸如人际关系网络, 血管网络, 神经网络, 电力网络, Internet 网络, 飞机航线网络, 铁路网络等网络都存在着空间结构。在这类网络上, 每个顶点都有自身固有的空间位置, 不难想象网络的空间结构会对网络的特征和功能起到不可忽视的作用。因而, 空间网络发展成为复杂网络理论的一个重要分支。本文将首先简要回顾诸如社会网、航空网等空间网络的实证结果并进行相应分析, 然后详细介绍空间网络上的导航性, 同步能力和疾病传播等动态过程, 以便读者深入了解空间网络的发展近况。

## 2. 网络空间结构的实证与分析

### 2.1. 社会网

近年来, 社会网络的空间性质引起了人们广泛关注。研究社会网络对理解人们如何交往、传递信息、以及社会关系如何演化等基本问题都具有重要意义, 因而吸引了不少学者的关注。研究显示社会网络不仅具有明显的小世界和社团结构特征, 而且在空间地理位置上也存在重要特征。很多实证研究表明, 社会网络的空间距离在空间分布上存在无标度特征, 即我们和我们的朋友之间的距离呈幂率分布。

Liben-Nowel 等<sup>[17]</sup>以 LiveJournal 上的 1, 312, 454 用户作为网络节点, 用户之间的链接作为连边构建了一个网络, 并且通过注册的信息能够知道每个顶点相应的地理位置。研究发现, 用户间存在链接的分布满足  $P(r) \propto r^{-1}$ , 其中  $r$  为用户间的地理距离。同时, 实验表明在该网络上, 仅仅依靠局部的地理信息就能够在全局范围内进行非常有效地搜索。另外, Adamic 和 Adar<sup>[18]</sup>利用 HP 实验室 Email 用户之间的通信记录构建出一个相对较小的网络, 此网络仅仅包含 436 个节点。他们在该网络上得到了与 Liben-Nowel 等人相同的结论, 即相互联系的两人之间地理距离的概率密度函数满足  $P(r) \propto r^{-1}$  关系, 其中  $r$  代表地理距离。2008 年, Lambiotte 等<sup>[19]</sup>分析了一个大型通讯网络的通讯数据, 此网络包含了 6 个月内 250 万个手机用户之间的 8.1 亿次通讯记录, 统计发现任意两个节点 (手机用户)  $u$  和  $v$  之间存在连边的概率满足  $P(u, v) \propto r(u, v)^{-2}$ , 其中  $r(u, v)$  是节点  $u$  与  $v$  之间的地理距离。考虑到在 2 维平面上与一个固定节点距离为  $r$  的节点数量和  $r$  成正比, 于是可以得到该网络也满足  $P(r) \propto r \cdot r^{-2} = r^{-1}$ , 这与前面在线网络的实证结果一致。最近 Goldenberg 和 Levy<sup>[20]</sup>对 IT 革命和社会

互动也进行了实证研究，他们搜集了 100,000 个 Facebook 用户的数据，构建出一个包含 1,297 个节点和 4,455 条边的网络。对该网络进行统计，也得到了  $P(r) \propto r^{-1}$  的幂率特性。

胡延庆等<sup>[21]</sup>从以上社会空间网络实证工作出发，归纳出社会网络的空间结构存在  $P(r) \propto r^{-1}$  的幂率特性，并且从人们追求信息量最大化的角度揭示了这种特性在社会网络中的普适性。

## 2.2. 社会网络幂率特性的模型解释

由于胡延庆等<sup>[21]</sup>的工作能够很好说明社会网络中为什么普遍存在  $P(r) \propto r^{-1}$  这种空间幂率特性，我们将在此处进行简单介绍。他们在模型中用一个循环边界条件的规则网格来表示整个社会系统，网格上的顶点表示社会系统中的个体。一般来讲，当一个朋友离我们很远的时候维持关系更加困难，很近的时候保持朋友关系更加容易。假设维持一个朋友关系的代价（称为能量）正比于他们之间的地理距离，并且每个个体的能量为  $\omega$ 。因此对任意顶点  $u$  存在  $\sum_{v=1}^m r(u,v) = \omega$ ，其中  $m$  是顶点  $u$  的朋友数量，

$r(u,v)$  是顶点  $u$  和  $v$  之间的地理距离。文中使用顶点  $v$  和  $v$  的所有朋友构成的顶点序列来表示顶点  $u$  能够从顶点  $v$  处获得的信息，也就是说顶点  $u$  从整个社会关系网络中获取的信息是他所有的朋友顶点和他们所有朋友的所有朋友顶点构成的一个序列。以图 1 所示的网络结构对该过程进行简单说明：顶点 2、3 和 4 都是顶点 1 的朋友，于是应该满足  $d(1,2) + d(1,3) + d(1,4) = \omega$ 。进一步考虑顶点 2、3 和 4 的所有朋友，可以知道顶点 1 从该网络中收集到的信息序列为  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10\}$ 。该信息

序列中的各顶点出现频率分别为  $q_1 = q_{11} = q_{12} = 0$ ， $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_8 = q_{10} = 1/11$ ， $q_7 = q_9 = 2/11$ 。文中使用信息序列的信息熵来表示顶点  $u$  能够获得的信息量。因为所有顶点是同质的，所以任一顶点获得的信息量都可以用来表示其他顶点的信息量。进而可以使用

$$\text{Max } \varepsilon = -\sum_{i=1}^n q_i \log q_i$$

建立社会网络模型，其中  $q_i$  表示顶点  $i$  在信息序列中出现的频率， $n$  表示网络中

顶点的数量。如果顶点  $i$  不在序列中出现则  $q_i = 0$ ，同时定义  $q_i \log q_i = 0$ 。

人们倾向于寻找距离较远的朋友来获取更多的信息，同时又受到能量约束从而无法维持距离较远的朋友关系。假定社会网络中朋友关系的分布满足  $P(r) \propto r^{-\alpha}$  的幂率形式。因此，最优化交朋友的过程等价于在能量约束条件下寻找幂指数  $\alpha$  使得信息熵  $\varepsilon$  最大。图 2 给出了相应的模拟结果，其中左图为当  $L = 10000$  时  $\omega$ ， $\alpha$  和  $\varepsilon$  关系的等高线图；右图表示最优  $\alpha$  值和网络规模  $L$  的关系。模拟结果显示： $L$  越大最优  $\alpha$  越趋近于 1，同时能量  $\omega$  能够在很大的区间范围内满足  $\alpha = 1$  时信息熵  $\varepsilon$  最大。胡延庆等人也给出了相应的数学分析过程，说明了  $\alpha = 1$  时信息熵最大这一结论。

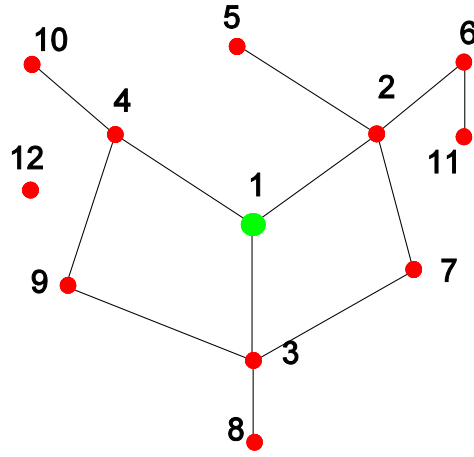


图 1 信息获取示意图<sup>[21]</sup>

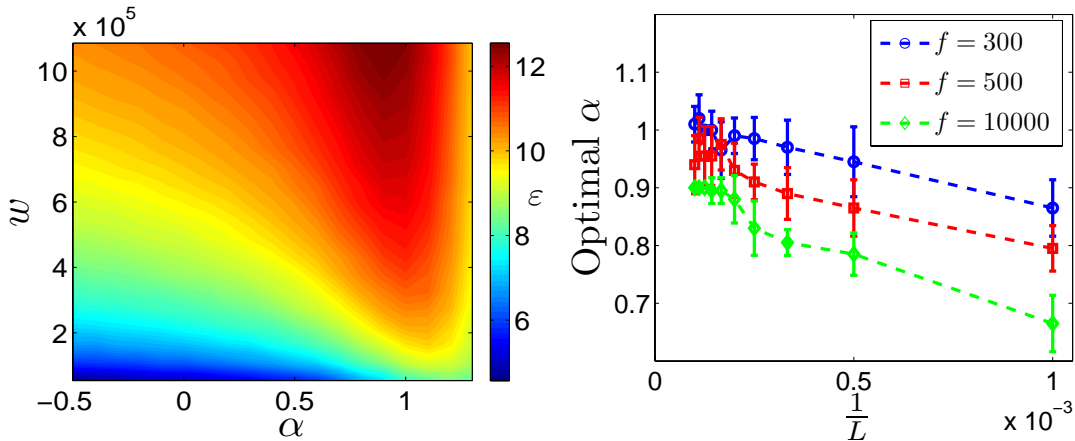


图 2 信息熵模拟结果<sup>[21]</sup>

### 2.3. Internet 网络

相对其它空间网络而言，Internet 空间网络的实证数据比较容易获取，而且 Internet 网络在日常生活中也非常重要，因而 Internet 网络的空间结构研究比较全面。Yook 等<sup>[22]</sup>对 Internet 路由器层面和人口分布情况进行了对照研究。研究表明在经济比较发达的地区，Internet 顶点位置关系和人口分布有很强的相关性。利用盒覆盖的方法对 Internet 网络多个层次的顶点分布维数进行计算得到 Internet 网络这些层次的分形维度和人口分布的分形维度非常吻合，都为  $1.5 \pm 0.1$ 。对于 Internet 这样的空间网络而言，这些结论容易理解，因为人口多的地方网络需求也多。Goldenberg 等<sup>[20]</sup>研究科学技术发展对通讯距离的影响发现电子通讯的范围与地理上的距离成反比，其分布遵循幂率分布。

Barthélemy 等<sup>[23]</sup>讨论了如何从无标度网络向空间网络的转型。Csányi 等<sup>[24]</sup>讨论了空间因素对网络性质的影响，指出在现实网络中可以很清楚地观察到双歧分支 (dichotomy)。Barthelemy 等<sup>[25]</sup>分析了法国“Renater”网络，该网络有两百万的用户并且包含三十个在法国不同的地区相互连接的路由器。实证得出该网络的交通流主要发生在少部分路由器之间，而绝大多数路由器上的交通流都可以忽略。Warren 等<sup>[26]</sup>将网络节点嵌入在一个二维的网格里，指出渗流也会受到空间因素的影响。

## 2.4. 航空网

航空网作为一类重要的空间网络，相关的研究也很多。航空运输会影响一个地区、国家，甚至全球经济的发展，因此研究航空网络有重要的现实意义。航空网络本身会受到许多因素的影响。诸如地理位置、历史、政治因素，以及各个航空公司自身利益都会影响整个航空网络。Guimera 等<sup>[27, 28]</sup>分析全球航空网络得出全球航空网是一个小世界网络的结论。

杨华等<sup>[29]</sup>从中国国际航空公司网站获取数据，构建了一个包含 177 个机场和 411 条航线（包括国际航线）的航空网络。统计表明节点之间距离的分布服从幂率分布，幂指数近似为-2.38。Hayashi<sup>[30]</sup>研究日本航空公司和全日空构成的网络指出日本航空网也存在幂率特性。日本航空公司网包括 52 个节点（机场）和 961 条连边（航线），全日空网络包括 49 个节点（机场）和 909 条连边（航线），其他网络由 1,114 条连边（包括国际航线）和 84 个节点（机场）构成。对于日本航空网，尽管国内航班的距离分布呈指数衰减，但是加入国际航班之后距离分布仍然服从幂率分布。Xu 等<sup>[31]</sup>使用加权网络的方法研究了美国航空网的空间结构，其中，边的权重为平均每天的客流量、直航的距离以及单程平均票价。他们使用 2002 年到 2005 年的所有数据构建了 16 个网络，其中每一个网络都包括超过 1,000 个大城市之间的通航，研究表明美国航空网中的距离分布也服从幂率分布其幂指数近似为-2.2。

## 2.5. 其他网络

人脑作为人类的思维器官其结构和功能都十分复杂，是人们目前所知的最复杂的系统之一。田丽霞等<sup>[32]</sup>研究大脑网络得到的结果表明大脑网络具有小世界特性。然而对大脑的研究目前还处于起步阶段，很多问题都亟待探索，比如大脑结构网络与功能网络的相互影响、以及网络拓扑结构随时间如何衍化、网络拓扑结构参数与认知、行为满足什么关系等等。除 Internet 网、社会网、航空网、人脑之外还存在大量的其他空间网络，相关的实证工作不在此处一一列举。

# 3. 空间网络上的可导航研究

## 3.1. 小世界现象

小世界网络是复杂网络研究中的一个重要方面。通常将同时具有较小平均最短路径和较大集聚系数的网络划归为小世界网络。大量的研究致力于探索小世界网络区别于规则网络和随机网络的独特性质。最早的工作可以追溯到社会心理学家 Milgram 等人在 20 世纪 60 年代设计的一系列著名社会实验，用以研究真实社会中朋友关系网络传递信息的能力<sup>[33, 34]</sup>。试验开始阶段随机选择 296 位实验者让他们传递一封信件给居住在波士顿郊区的一个股票经纪人，实验者仅被告知包括该股票经纪人的居住地点等在内的个人信息。同时要求实验对象只能够通过认识的朋友传递信件。最终共有 64 封信件被成功送达，并且所有成功路径的平均长度大约为 6。该实验结果显示我们的世界是“六度分离”的。Milgram 的实验使人们意识到真实的社会网络中任意两个人之间都存在着很短的平均路径。

尽管“六度分离”很快就被广泛接受，然而正如 Kleinfeld 所说：Milgram 实验中信件成功送达

目标的比率较低而且成功的信件传递链很短有可能是因为实验选择的目标本身具有较高的社会地位<sup>[36]</sup>。为了克服 Milgram 实验中的这些缺陷, Dodds 等人在全球范围内基于 Internet 重复了 Milgram 的社会搜寻实验<sup>[36]</sup>。实验对象都是网站<sup>[37]</sup>上的在线注册用户。实验前随机选取 13 个国家的 18 个目标为搜寻目标。包括初始选定目标以及后来的信息传递者, 共计有 166 个国家的 61, 168 位实验者参与实验, 形成了 24, 163 条信息传递链。与 Milgram 实验不同的是, Dodds 实验中每一位信息传递者除了提供选定的下一位传递者的姓名和 E-mail 地址外, 还需要描述与被选定传递者之间如何认识以及关系如何等额外信息。实验结果显示, 大部分搜索只需要经过大约 5 到 7 次传递就能够到达终点。深入分析可知, 在搜索初期地理位置信息占据主导, 在大约第 3 次传递后, 职业信息等其他辅助信息将变得更为重要。

考虑到实验结果容易受到参与者中途放弃任务的影响, Liben-Nowell 等人在 LiveJournal 网络上进行了搜寻实验<sup>[17]</sup>。该网络包含大概 500, 000 位居住在美国境内的 LiveJournal 用户以及 3, 959, 440 条由朋友关系形成的连边。统计显示此网络的最大连通集团(任何两个节点之间都存在一条连通路径)包含了 76% 的节点, 并且此网络 0.2 的集聚系数符合一般社会网络具有较高集聚系数的特征。需要注意的是该网络上的实验有用信息仅有地理信息而不存在其他辅助信息。尽管如此, 结果显示对随机选取的初始节点和目标节点大约 13% 的信息能够在 4 步左右完成传递过程。此结果与 Milgram 实验结果相似, 说明 Livejournal 网络存在“小世界”现象。其他实证工作也揭示出大量真实网络诸如 elegans 神经网络, 美国西海岸电力网, 电影演员合作网等等都存在“小世界”现象<sup>[38, 39, 40, 41]</sup>。总之, 大量的事实表明社会关系网络普遍存在“小世界”现象。

### 3.2. 基于网格的导航模型

显然“六度分离”具有两个重要性质: 第一, 网络中任意节点之间存在大量的较短路径; 第二, 网络中的个体能够有效地找到这些路径。Kleinberg 对此给出了漂亮解释<sup>[42, 43]</sup>。他使用一个添加了长程连边且规模为  $n \times n$  的 2 维规则网格来抽象真实的社会网络。模型中每个节点都与离它网格距离为  $p$  的所有节点之间存在短程连边, 同时该结点还拥有  $q$  条长程连边。该网络示意图见图 3, 其中 A 图为  $n = 6, p = 1$  和  $q = 0$  时的 2 维网络, B 图为  $p = 1$  和  $q = 2$  时的网络示意图, 其中  $v$  节点和  $w$  节点为  $u$  节点的远程连边终点。假定任意两个节点之间存在一条有向长程连边的概率服从如下幂率分布:

$$P_k(u, v) = \frac{d(u, v)^{-\alpha}}{\sum_{\omega \neq u} d(u, \omega)^{-\alpha}} \quad (1)$$

其中,  $d(u, v)$  是节点  $u$  与节点  $v$  之间的网格距离,  $\alpha$  为幂指数。

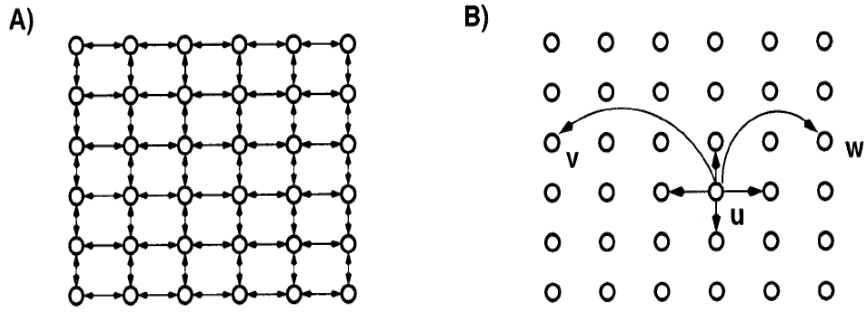


图 3 Kleinberg 导航示意图<sup>[43]</sup>

考虑到实验者都无法全面把握身处的网络结构，即实验者只拥有局部信息而非全局信息，Kleinberg 提出了一种分散式贪婪算法用以描述整个搜索过程，该算法只需要了解搜索目标的地理位置以及与当前信息传递者存在连边的所有节点的地理位置。整个搜索过程中，实验者都将信息传递给所有邻居节点中离搜索目标网格距离最近的节点。如果说一个网络的搜索时间复杂度随着网络的规模  $n$  呈对数多项式增长，则称该网络可导航。当  $p=1$  以及  $q=1$  时，Kleinberg 证明了搜索时间复杂度最低的幂指数为  $\alpha = 2$ <sup>[43]</sup>。最优幂指数  $\alpha = 2$  时的搜索时间复杂度上限为  $o(\log^2 n)$ ，此时的 Kleinberg 模型可导航。其他幂指数情况下的相应的时间复杂度下限为：

$$T \sim n^x, x \geq x_K = \begin{cases} (2-\alpha)/3, & 0 \leq \alpha < 2 \\ (\alpha-2)/(\alpha-1), & \alpha > 2 \end{cases} \quad (2)$$

其中， $x_K$  与  $\alpha$  之间的函数关系如图 4 所示。

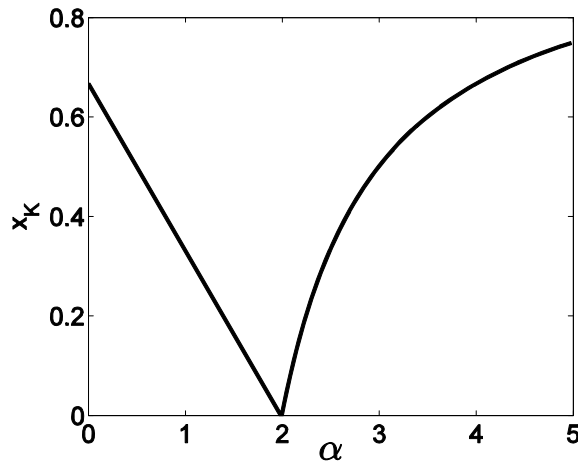


图 4 2 维 Kleinberg 导航模型中时间复杂度下限与幂指数  $\alpha$  的关系<sup>[43]</sup>

更一般地，Kleinberg 的结论可以推广到任意的  $d$  维网格中。在任意  $d$  维空间中，当且仅当幂指数为  $\alpha = d$  时，分散式搜索的时间复杂度最低，并且此时是可导航的。同时其他幂指数情况下的搜索时间复杂度为  $T \sim n^x$ ，是不可导航的，其下限为：

$$T \sim n^x, x \geq x_K = \begin{cases} (d-\alpha)/(d+1), & 0 \leq \alpha < d \\ (\alpha-d)/(\alpha-d+1), & \alpha > d \end{cases} \quad (3)$$

Martel 等人分析 Kleinberg 的导航模型时发现最优幂指数下的导航时间复杂度是紧约束，并发展了一套分析空间网络上导航的数学方法<sup>[44]</sup>。进一步，他们指出 Kleinberg 模型中的网络平均直径为  $O(\log n)$ 。最近 Carmi 等人使用主方程的方法讨论了 Kleinberg 导航模型的渐进行为<sup>[45]</sup>。他们得到  $\alpha = d$  时准确的时间复杂度为  $T \propto \ln^2 n$ ，并且给出了搜索时间复杂度和幂指数  $\alpha$  之间更为准确的函数关系。任意  $d$  维 Kleinberg 模型中的搜索时间复杂度如下：

$$T \propto n^x, x = \begin{cases} (d-\alpha)/(d+1-\alpha), & 0 \leq \alpha < d \\ \alpha-d, & d < \alpha < d+1 \\ 1, & \alpha > d+1 \end{cases} \quad (4)$$

与此同时，Caretta Cartozo 等人也使用随机马尔科夫过程的方法对 Kleinberg 导航模型的渐进行为进行了讨论<sup>[46]</sup>。他们推导出的搜索时间复杂度与幂指数  $\alpha$  之间的关系如下：

$$T \propto \begin{cases} n^{(d-\alpha)/(d+1-\alpha)} / q^{1/(d+1-\alpha)}, & \alpha < d \\ \ln n^2 / q, & \alpha = d \\ n^{\alpha-d} / q, & d \leq \alpha < d+1 \\ n / (q \ln n), & \alpha = d+1 \\ n / [1 + c(\alpha, \varepsilon, d)q], & \alpha > d+1 \end{cases} \quad (5)$$

其中， $q$  是一个线性的概率密度（具体含义参见文献<sup>[46]</sup>）， $c(\alpha, \varepsilon, d)$  为只与  $\alpha$  和  $d$  有关的常数。从式(5)可知只有当  $\alpha < d+1$  时，Kleinberg 的贪婪算法搜索时间复杂度才会显著低于初始节点与目标节点之间的网格距离。比较式(5)与式(4)可以知道 Caretta Cartozo 等人与 Carmi 等人得到的结论是一致的。

对任意  $d$  维（整数维）的网格来讲，Kleinberg 已经证明导航最优幂指数为  $\alpha = d$ 。在此基础上，Roberson 等人对分形维度下的 Kleinberg 导航模型进行了讨论<sup>[47]</sup>。他们通过在 Sierpinski 地毯上仿真 Kleinberg 导航过程得到分形维时导航的最优幂指数满足  $\alpha = d_f$ ，并且误差范围在  $1/\ln^2 N$  以内，其中  $N$  为总节点数。考虑一个包含  $N$  个节点的分形，显然随机选择的两个节点之间的距离  $L$  满足  $L \propto N^{1/d_f}$ 。采用 Kleinberg 的证明方式容易得到分形维  $d_f$  下的搜索时间复杂度  $T(L)$  与幂指数  $\alpha$  存在如下关系：

$$T(L) \propto \begin{cases} L^{(d_f-\alpha)/(1+d_f)}, & 0 < \alpha < d_f \\ \ln L^2, & \alpha = d_f \\ L^{(\alpha-d_f)/(\alpha-d_f+1)}, & \alpha > d_f+1 \end{cases} \quad (6)$$

以上结论说明对于任意  $d \in \mathbf{R}^+$  维的基于网格的 Kleinberg 导航模型，最优导航幂指数满足  $\alpha = d$ 。

### 3.3. 基于其他网络的可导航



继 Kleinberg 的规则网格导航模型之后，大量工作致力于研究基于其他网络的导航<sup>[36, 48, 49, 50]</sup>。Killworth 等人指出 Milgram 实验中大部分实验者都是根据地理信息和职业信息进行决策。已知二维网格能够较好地反映地理位置信息，层次结构是对职业信息的一个简单合理的近似抽象<sup>[51]</sup>。可以合理假设最底层任意两个节点之间的分离程度越大其存在连接的概率越低。考虑一个包含  $n$  个叶节点的完全  $b$ -叉树，显然树的深度是  $h = \log_b n$ 。对任意两个叶节点  $u$  和  $v$ ，其层次距离  $h(u, v)$  为其最低层共同父节点的深度。定义如下有向图  $G$ ，其叶节点集为  $V$ ，假定从任意叶节点出发都存在  $k$  条连边，则节点  $u$  选择节点  $v$  作为其一条连边的端点的概率为：

$$P_h(u, v) = \frac{b^{-\beta h(u, v)}}{\sum_{\omega \neq u} b^{-\beta h(u, \omega)}} \quad (7)$$

可以看出，此处参数  $\beta$  的作用类似 Kleinberg 模型中的幂指数  $\alpha$ 。 $\beta = 0$  意味着从所有其他叶节点中等概率地选择一个节点进行连边。随着  $\beta$  增加，每次将更倾向选择与其层次距离近的节点进行连边。

现考虑在  $G$  上对任意给定的初始节点  $s$  和目标节点  $t$  进行启发式搜索的时间复杂度。与规则网格不同，在  $G$  中  $s$  和  $t$  之间可能不存在连通路径。如果启发式搜索至少能够以概率  $1 - \varepsilon(n)$  找到一条长度为  $O(f(n))$  的路径连接  $s$  和  $t$ ，则称  $G$  上的搜索时间复杂度为  $f(n)$ ，其中  $n$  增加时  $\varepsilon(n)$  趋于 0。

Kleinberg 在文献<sup>[48]</sup>中给出了层次模型中导航时间复杂度的如下结论：

- 1、 当  $\beta = 1$  且  $k = c \log^2 n$  时，若常数  $c$  足够大则存在时间复杂度为  $\log n$  的多项式的启发式搜索算法；
- 2、 对任意  $\beta \neq 1$ ，不存在时间复杂度为  $\log n$  的多项式的启发式搜索算法。

即  $\beta = 1$  时，只要保证层次结构网络中每个节点有足够多的向外连边，网络就会可导航。

事实上可以用同一个框架将规则网络上的导航模型和层次结构网络上的导航模型二者统一。社会网络中的两个个体如果同处某群体内部（居住在同一个地方，或者处于同样的职位，或者拥有同样的宗教信仰等等）则他们之间倾向存在连接。已知节点集  $V$  和一个关于群体的集合  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ ，

其中  $S_i, i \in [1, m]$  表示一个群体。对于给定的常数  $\lambda < 1$  和  $\kappa > 1$ ，考虑以下三条性质：

- 1、 节点集  $V$  本身是一个群体；
- 2、 如果包含节点  $v$  的群体  $S_i$  的节点数量为  $g$ ，那么存在包含节点  $v$  的群体  $S_j \subseteq S_i$ ，其节点数量至少为  $\lambda g$ ；
- 3、 如果节点数不超过  $g$  的群体  $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}, \dots$  都包含节点  $v$ ，那么这些群体集的节点数量不超过  $\kappa g$ 。

容易验证，无论是网格上的导航模型还是树形结构的导航模型都能够同时满足以上三条性质。定

义节点  $u$  和  $v$  之间的距离  $g(u, v)$  为同时包含  $u$  和  $v$  的最小的群体所包含的节点数量, 按照以下方式产生一个新的导航网络。假定每一个节点的出度为  $k$ , 其中节点  $u$  选择节点  $v$  作为其一条连边终点的概率满足:

$$P_g(u, v) = \frac{g(u, v)^{-\gamma}}{\sum_{\omega \neq u} g(u, \omega)^{-\gamma}} \quad (8)$$

不难看出  $\gamma$  与前文中的  $\alpha$  和  $\beta$  具有同样的作用。当  $\gamma$  增加时, 都倾向于选择距离较近的节点作为连边对象。对该网络上的可导航问题, Kleinberg 也给出了以下结论<sup>[49]</sup>:

1.  $\gamma = 1$ , 当出度  $k = c \log^2 n$  且常数  $c$  足够大, 对任意满足前文给出的三条性质的  $S$  都存在时间复杂度为  $\log n$  的多项式的启发式搜索算法;
2.  $\gamma < 1$ , 不存在时间复杂度为  $\log n$  的多项式的启发式搜索算法。

注意  $\gamma > 1$  时, 无法直接判断是否存在时间复杂度为  $\log n$  的多项式的启发式搜索算法。

Liben-Nowell 等人实证发现真实的社会网络中人口密度呈不均匀分布, 进而研究了不均匀网络中的导航问题<sup>[17]</sup>。考虑到人口分布不均匀这一特点, Liben-Nowell 等人的模型中不再使用地理距离来确定在节点  $u$  和  $v$  之间添加长程连边的概率。定义节点  $v$  相对于节点  $u$  的名次  $rank_u(v)$  为  $rank_u(v) := |\{\omega \mid d(u, \omega) < d(u, v)\}|$ , 进而假定节点  $u$  和  $v$  之间存在连边的概率为:

$$P_r(u, v) = \frac{rank_u(v)^{-1}}{\sum_{\omega \neq u} rank_u(\omega)^{-1}} \quad (9)$$

不难看出 (9) 式和 (1) 式在均匀网格上等价, 即 Kleinberg 导航模型是 Liben-Nowell 导航模型在人口分布均匀情况下的一个特例。之所以基于名次确定节点之间存在连边的概率, 一个重要的原因是该方法既不受所处地理空间维度的影响也不受人口分布是否均匀的影响。同时实证显示 Livejournal 网络中的朋友关系分布能够很好地满足 (9) 式。具体地, 将一个人口总数为  $n$  的社会网络抽象成一个二维网格  $N$  且其中  $(x, y)$  处的网格上分布人口为  $p(x, y)$ 。显然有  $\sum_{x, y} p(x, y) = n$  成立。任意  $u$  (网格节点上的任意一人) 从上、下、左、右 4 个最近网格上分别随机选择一人作为近邻, 然后再根据 (9) 式从所有其他人中选择一人作为长程连边对象。Liben-Nowell 等人指出: 对于具有  $n$  人的  $k$  维网格来讲, 无论人口呈何种分布启发式搜索的时间复杂度都不会超过  $c \cdot \log^3 n$ , 其中常数  $c$  只与  $k$  有关 (具体证明过程参见 [50])。

实证表明很多网络诸如 Internet 网<sup>[52]</sup>、WWW 网<sup>[53, 54]</sup>、Metabolic 网<sup>[55]</sup>、Cellular 网<sup>[56]</sup> 以及信任合作网<sup>[57]</sup> 等自然网或者人工网的度分布都具有无标度特性。因而讨论无标度网络上的导航问题具有重要意义。在这种网络上导航一般和网络的空间性质无关, 考虑到其重要性, 也在此处做一个简单介绍。Cohen 等人讨论包含  $N$  个节点且度分布服从  $P(k) \propto k^{-\lambda}$  的无标度网的直径问题<sup>[58]</sup>, 得出无标度网的直

径  $d$  满足如下关系:

$$d \propto \begin{cases} \ln \ln N, & 2 < \lambda < 3 \\ \ln N / \ln \ln N, & \lambda = 3 \\ \ln N, & \lambda > 3 \end{cases} \quad (10)$$

不难看出无标度网络具有极小的直径。Boguná 等人指出在这一类无标度网络上的启发式搜索时间复杂度为  $T \propto \ln \ln N / |\ln(\lambda - 2)|$ , 意味着无标度网络可导航<sup>[59]</sup>。有趣的是在无标度网络上的启发式搜索几乎能够找到最短路径, 即此类网络上的搜索并不需要全局信息。这一发现对诸如 Internet 网这类难以了解整个网络拓扑结构的网络来讲无疑具有重要意义。

Kim 等人考虑了在无标度网络上进行搜索的不同策略<sup>[60]</sup>。他们在使用 BA 方法产生的无标度网络上分别模拟了以下 4 种搜索策略。

- 1、选择处于最短路径上的节点 (SHT);
- 2、选择所有邻居节点中的最大度节点 (MAX);
- 3、每次从邻居节点中等概率选择一个节点 (RND);
- 4、从邻居节点中以概率  $P(i) = k_i / \sum_j k_j$  选择度为  $k_i$  的节点 (PRF)。

显然 SHT 策略需要全局信息, 而其他 3 种策略仅需要局部信息。模拟结果显示 SHT 策略的时间复杂度为  $1.13 \log_{10} N$ , MAX 策略的时间复杂度为  $2.71 \log_{10} N$ , 而 RND 策略和 PRF 策略的时间复杂度分别为  $N^{0.51}$  和  $N^{0.34}$ 。不难看出 SHT 策略和 MAX 策略的时间复杂度基本相同, 此结果进一步验证了在无标度网络上进行搜索并不需要全局信息这一结论。

### 3.4. 基于网络模型的间接启发式搜索

为了更真实反映 Milgram 实验中的搜索过程, 有必要在 Kleinberg 启发式搜索中考虑额外信息的作用<sup>[44, 61]</sup>。Fraigniaud 等人指出社会网络中的每一个体都很有可能知道其他两个人之间是否存在朋友关系, 尽管这两个人可能都与该个体本身没有朋友关系。举例来讲你不认识法国总统萨科奇, 但是你却知道萨科奇认识美国总统奥巴马。如果定义  $A_x$  为  $x$  节点的额外信息集, 则 Kleinberg 模型中有  $A_x = \{e_x\}$ , 其中  $e_x$  为  $x$  的长程连边, 而 Fraigniaud 模型中则有  $A_x = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}, e_x \in A_x$ 。以图 5 为例,  $x$  的额外信息集可以表示为  $A_x = \{(x, x'), (a, a'), (d, d'), (y, y')\}$ 。也就是说  $x$  节点除自己的长程连边  $(x, x')$  外, 还知道  $a$  和  $a'$ 、 $d$  和  $d'$ 、 $y$  和  $y'$  存在长程连边。注意  $x$  节点与  $y$  和  $y'$  之间没有连接。一个合理的假设是  $A_x$  包含的节点数量不应该太大但是会随网络规模的增加而增加, 同时  $A_x$  中的节点倾向于位于  $x$  周围而非离  $x$  太远。

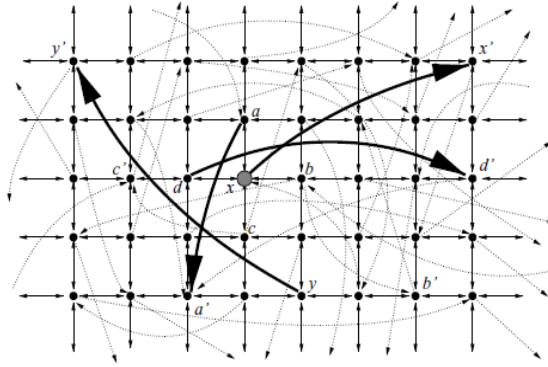


图 5 Fraigniaud 模型中长程连边示意图<sup>[61]</sup>

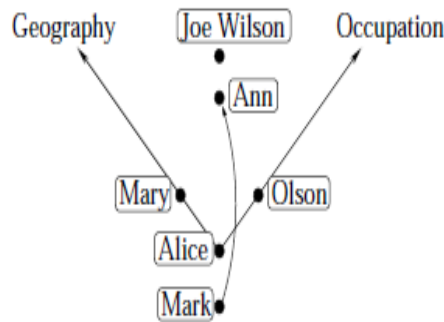


图 6 Fraigniaud 模型中间接启发式搜索示意图<sup>[61]</sup>

Fraigniaud 等人模型中搜索的线索既可以是地理信息也可以是职业信息等其他信息。典型的间接启发式搜索过程如图 6 所示。假定信息当前处于 Alice 处，并且最终需要把信息传递到 Joe Wilson 处。从地理线索来看，应该将信息直接传递给其友 Mary；考虑职业信息这一线索，则应该将信息传递给 Olson，因为 Olson 与 Joe Wilson 有相似职业；但是考虑到 Alice 知道 Mark 认识 Ann 的话策略将会不同，因为 Ann 离 Joe Wilson 的地理距离有大幅度提高。搜索过程很可能是先将 Alice 不认识的 Mark 确定为搜索目标，然后再使用启发式搜索将信息传递给 Mark。

显然  $d$  维 Kleinberg 导航模型中任意节点  $x$  都存在  $2d$  条短程连边和 1 条长程连边。如果记  $u = tail(e)$ 、 $v = head(e)$  其中  $e = (u, v)$  为有向连边，则可以将间接启发式搜索过程的每一次搜索区分为如下两个阶段：

1. 从有向边集合  $\{(x, \omega_1), \dots, (x, \omega_{2d})\} \cup A_x$  中选取  $e$  使得  $head(e)$  离目标节点  $t$  的网格距离最近，其中  $\{\omega_1, \dots, \omega_{2d}\}$  表示当前节点  $x$  的所有网格距离为 1 的邻居节点的集合。如果这样的边不止一条则选择使  $tail(e)$  离  $x$  最近的连边。记  $y = tail(e)$  为该次搜索的中间目标。
2. 从当前节点  $x$  的  $2d + 1$  个邻居节点中选择离中间目标  $y$  网格距离最近的节点并且将信息传递到该节点。

与 Kleinberg 启发式搜索不同，间接启发式搜索不能够保证每次搜索后离目标节点的地理距离都减少。Fraigniaud 等人指出如果网络中的每个节点都有与其最近的  $O(\log n)$  个节点的长程连边的额外

信息，则间接启发式搜索的时间复杂度为  $O(\log^{1+\frac{1}{d}} n)$ 。Martel 等人在讨论 Kleinberg 导航模型时对此给出了具体的证明过程<sup>[62]</sup>。进一步讨论额外信息量与搜索时间复杂度的关系可以得到如图 7 所示的结论。额外信息量维持在  $O(\log n)$  时候最利于间接启发式搜索。注意尽管知道所有节点的长程连边信息，间接启发式搜索也不会比 Kleinberg 启发式搜索在效率上有显著提高。

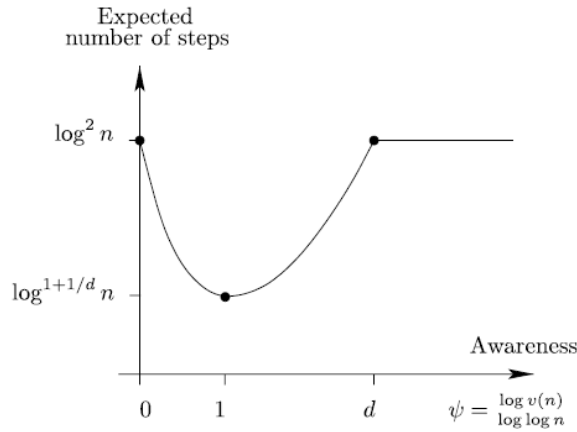


图 7 Fraigniaud 模型中间接启发式搜索时间复杂度与额外信息量的关系<sup>[61]</sup>

### 3.5. 增长的可导航网络模型

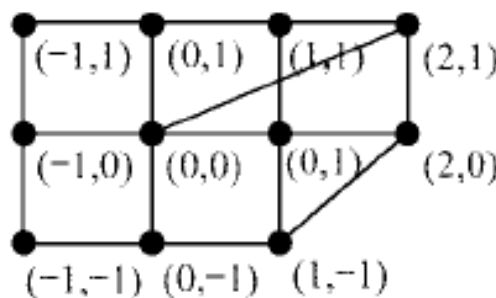
由于复杂系统的演化特性，复杂网络一般也被认为是在演化中产生的。也就是说复杂网络的顶点和边都在不断增长。复杂网络重要的度分布无标度性特征就被认为是由网络演化中边的偏好依附产生的。考虑到真实的社会关系网络在不停演化，上海大学史定华教授等提出了增长的可导航网络模型<sup>[63]</sup>。

增长的可导航网络模型假定在初始时刻存在如图 8 所示的初始网络。在一个横向和纵向都具有整数坐标的网格平面上，围绕坐标原点共有 9 个节点，并且这些节点之间都存在水平或垂直的短程连边。

网络增长时，从图中坐标为 (2,1) 的节点开始沿顺时针方向绕初始网络每个时间间隔增加一个新节点  $u$ ，与地理位置上晶格距离为 1 的所有节点产生短程连边，并且同时与距离较远的顶点产生  $m$  条长程连边。

新节点  $u$  与已有节点  $v$  产生长程连边的概率满足“广义引力择优原则”，即其概率  $P_s(u, v) = \frac{\rho(u, v)}{\sum_{\omega} \rho(\omega, v)}$ ，其中  $\rho(u, v) = \frac{(k_u \times k_v)^\delta}{d(u, v)^\alpha}$ ， $k_u$  与  $k_v$  分别为节点  $u$  和节点  $v$  的度， $d(u, v)$  为两个节点

之间的网格距离。在  $m = 3$  时模拟发现， $\delta = 1, \alpha = 1$  时网络可导航并且其度分布满足无标度特性。



### 3.6. 有限能量约束下的可导航

研究有限能量约束下的 Kleinberg 导航模型具有重要的现实意义。当改建一个地铁网络（比如 Manhattan 地铁网络）以使平均交通时间最短时，通常都存在一个事先给定的预算。

Li 等人首先研究了有限能量约束下网络平均最短路径  $\langle l \rangle$  与幂指数  $\alpha$  的关系<sup>[64]</sup>。他们使用的模型类似 Kleinberg 导航模型，但是在以幂率方式添加长程连边的时候引入了总能量（长程连边总长度） $\Lambda$  的限制。假定初始网络为一个  $L \times L$  的二维网格，任意两个节点  $u$  和  $v$  之间存在长程连边的概率与  $r_{ij}^{-\alpha}$  成比例，同时满足  $\Lambda = \sum r_{ij} = AL^2$ ，其中  $r_{ij}$  是  $u$  和  $v$  之间的网格距离， $A$  为常数。计算网络平均最短距离  $\langle l \rangle$  与幂指数  $\alpha$  之间的关系（具体结果如图 9 所示），可知在  $\alpha = 3$  时  $\langle l \rangle$  取得最小值。进一步，Li 等人还分别模拟了 1 维和 2 维有限能量约束下的启发式搜索平均搜索时间  $\langle l_s \rangle / L$  与幂指数  $\alpha$  的关系。模拟显示在 1 维情况下导航最优幂指数（平均搜索时间最短）为  $\alpha = 2$ ，2 维情况下导航最优幂指数  $\alpha = 3$ 。其中，2 维情况下的模拟结果如图 10。Li 等人给出的一个重要推断是无论根据全局信息计算的平均最短路径还是根据局部信息进行启发式搜索所需的平均搜索时间都在幂指数  $\alpha = d + 1$  处取得最优值，其中  $d$  为网格维数。模拟结果显示以上推论对  $d = 1$  以及  $d = 2$  都成立。Bianconi 等人实证得到美国航空网的幂指数为  $\alpha = 3.0 \pm 0.2$ <sup>[65]</sup>，该结果进一步支持了 2 维有限能量约束下的导航最优幂指数为  $\alpha = 3$  这一推断。Li 等人的推断与没有能量约束下的相应结论有显著区别，在没有能量约束下网络平均最短路径对应的最优幂指数为  $\alpha = 0$ ，而导航对应的最优幂指数为  $\alpha = d$ 。

杨华等在研究空间网络的幂率特征及其对交通动态的影响时也构建了一个有限能量约束下的网络<sup>[29]</sup>。该网络以规则网格为基础并且按照  $P(r) \propto r^{-\alpha}$  的概率在网格距离为  $r$  的两点之间添加一条长程连边。考虑到  $d$  维的网格中与任意节点距离为  $r$  的节点数量与  $r^{d-1}$  呈比例，杨华等人的模型中网格距离为  $r$  的节点  $u$  和  $v$  之间存在长程连边的概率等价于  $P_y(u, v) \propto r^{d-1+\alpha}$ 。他们指出当  $\alpha = 2$  时网络平均距离最短，这一结果与 Li 等人的推断一致。

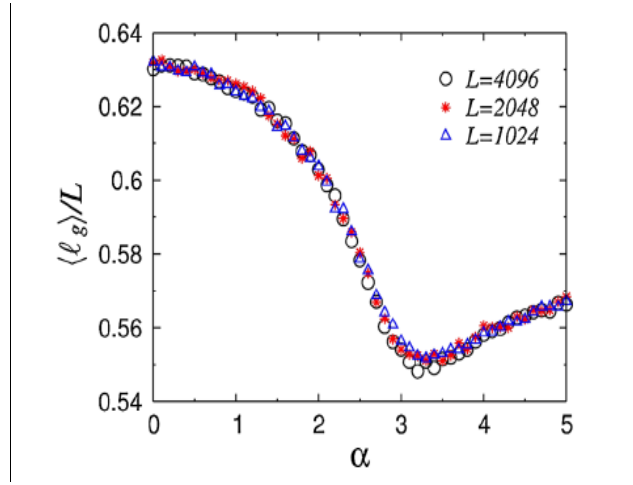


图 9 2 维平均搜索时间  $\langle l_g \rangle / L$  与幂指数  $\alpha$  的关系<sup>[64]</sup>

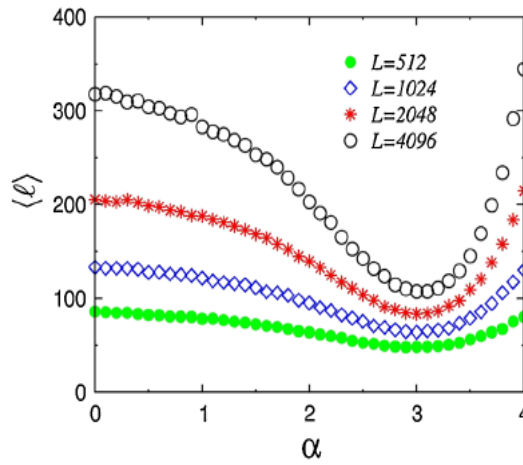


图 10 2 维平均最短平均路径  $\langle l \rangle$  与幂指数  $\alpha$  的关系<sup>[64]</sup>

Li 等人以及杨华等人的结果说明有限能量约束下的 Kleinberg 导航最优幂指数为  $\alpha = d + 1$ , 然而他们的工作以实验模拟为主而没有给出严格的证明过程。最近, 黎勇等人通过建立有限能量约束下的动态方程证明了在 1 维情况下最优幂指数为  $\alpha = 2$ , 并且给出了相应的导航时间复杂度<sup>[66]</sup>。考虑一个有  $N = 4n$  个节点的环, 每个节点与周围距离为 1 的 2 个节点之间存在短程连边, 同时任意距离为  $r$  的两个节点  $u$  和  $v$  之间存在长程连边的概率满足:

$$P(r, \alpha) = \frac{r^{-\alpha}}{2 \sum_{r=1}^{2n} r^{-\alpha}}, \alpha \geq 0 \quad (11)$$

在总能量  $\Lambda = cN$  的约束下整个环中的长程连边数量应该服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 其中  $\lambda = c \sum_{r=1}^{2n} r^{-\alpha} / \sum_{r=1}^{2n} r^{1-\alpha}$ 。进一步可以建立有限能量约束下导航过程的动态方程 (具体细节参见<sup>[66]</sup>)。求

解所建立的动态方程可知当网络规模  $n$  趋于无穷时导航时间复杂度为  $T/n$  ( $T$  为搜索距离为  $n$  的目标节点所用平均时间) 为:

$$T/n = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{c}} \arctan \frac{\sqrt{c}}{2}, & \alpha = 0 \\ \frac{2}{c \ln 2} \ln \frac{2+c \ln 2}{2}, & \alpha = 1 \\ \frac{2(\alpha-1)}{2(\alpha-1) + ce^{-\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}}, & \alpha \geq 2 \end{cases} \quad (12)$$

注意(12)式中没有给出 $0 < \alpha (\neq 1) < 2$ 时的导航时间复杂度，但是黎勇等人给出了相应的数值解，结果如图11所示，其中 $c=1$ 。当网络规模增加时数值解将会趋于理论解（实线），并且最优幂指数都是 $\alpha=2$ 。进一步，通过比较在网络中的实际模拟结果和相应的数值结果（图12）能够验证其方法的正确性，其中参数分别为 $c=0.5$ 和 $c=1$ 。

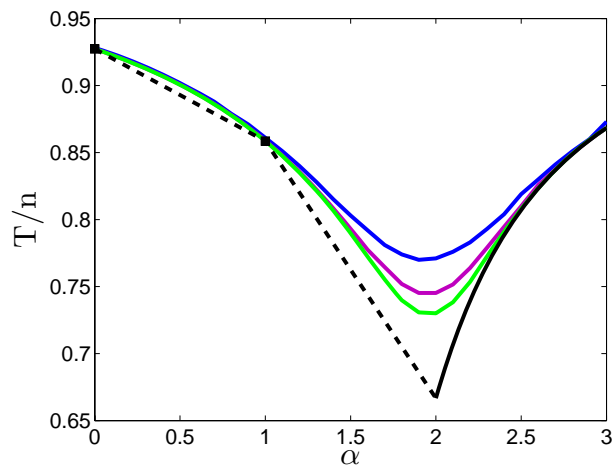


图 11 1 维导航时间复杂度的数值解及其理论解<sup>[66]</sup>

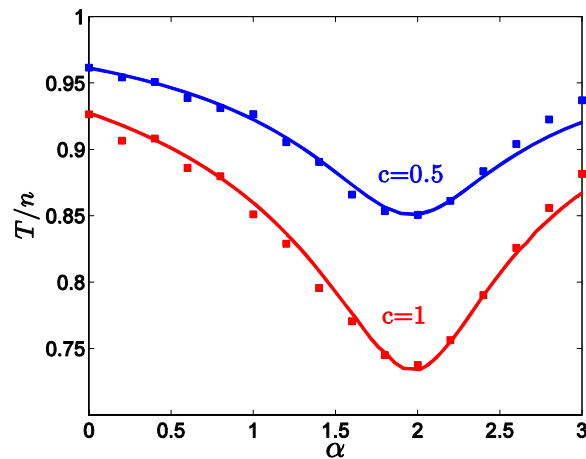


图 12 1 维导航模拟结果及其理论结果<sup>[66]</sup>

### 3.7. 导航总结

自从 Milgram 实验得到“六度分离”结果以后，小世界现象以及导航问题得到了广泛研究和讨论。Watts 等人首先从实证工作出发说明小世界现象普遍存在，然后从理论上构建了一个能够产生小世界



网络的重要模型。在此基础上，Kleinberg 以规则网格为基础通过在任意节点之间按照幂率方式添加长程连边的方式构建了一族导航模型，从理论上证明了“六度分离”结果的可能性，并且给出了相应的导航时间复杂度的上下限。继 Kleinberg 之后，大量工作致力于可导航问题的研究，其中主要包括分形维、无标度网等网络上的 Kleinberg 导航，Kleinberg 导航的渐进行为，导航策略以及在有限能量约束下的可导航等诸多问题。这些工作构成了复杂网络研究工作的一个重要分支即网络可导航研究。尽管当前对网络可导航问题的研究已经比较成熟，但是相信今后还会涌现出网络可导航问题的新的研究热点。

## 4. 空间网络上的同步现象

同步现象广泛存在于生物、化学、物理以及社会系统等领域中。心脏中的起搏细胞、神经系统中的神经元、剧院中有节奏的掌声、以及在亚洲南部的一些森林中观察到的同步发光的萤火虫等都是自然中存在的同步现象<sup>[67, 68]</sup>。长久以来，科学家都致力于认识同步现象的形成机制。

如果以单个振子来代表系统中的个体，那么整体上表现出的同步现象必然要求振子之间具有相互作用。因此定量刻画振子之间的耦合作用是研究同步现象的基础。已知振子的行为既受自身固有属性的影响也受外界其他振子的作用。出于简化目的使用物理变量  $\omega$  来描述单个振子的固有振动过程，进而可以通过该变量的相位  $\theta(t)$  来记录振子在  $t$  时刻所处的状态。

脉冲耦合是抽象振子之间耦合作用的一种直观方法。该方法假定当  $\omega$  超过某一给定阈值后就会向其耦合振子发送一个脉冲，该脉冲能够改变其耦合振子的相位。脉冲耦合方法通常需要满足以下两个基本假设：

1. 单个脉冲对耦合振子的相位影响不受一个峰电位间距内接受的脉冲数量影响；
2. 脉冲影响不具有记忆性，即只影响耦合振子当前时刻的相位而不会对耦合振子以后的振动相位造成影响。

尽管脉冲耦合方法能够直观地描述振子之间的耦合作用，然而该方式的时间离散性和非线性会给数学求解上带来巨大的困难，尤其是处理大量耦合振子组成的复杂系统。在大量追求数学上简洁可行的同步模型中，Kuramoto 在 1975 年提出的同步模型是最为成功的尝试<sup>[68]</sup>。

### 4.1. Kuramoto 同步模型

Kuramoto 使用如下动态过程描述  $N$  个相互耦合振子的系统中单个振子的运动过程：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), i=1, \dots, N \quad (13)$$

其中， $\theta_i(t)$  是振子  $i$  在  $t$  时刻的相位。振子  $i$  的固有振动频率  $\omega_i$  概率密度函数为  $g(\omega)$ 。从 (13) 式可知每个振子都独立地按照自身固有频率  $\omega_i$  振动，同时也受到其耦合振子的影响。做  $\theta_i \rightarrow \theta_i - \Omega t$  变换，其中  $\Omega$  是  $g(\omega)$  的期望，则整个系统由固有振动频率均值为零的耦合振子组成。可以知道当耦合作用

较小的时候系统不会出现同步现象，只有当耦合强度超过某一阈值  $K_c$  时才会出现同步现象。

Kuramoto 最早使用平均场耦合方式讨论了同步现象。所谓的平均场耦合即是将 (13) 式中耦合系数表示为  $K_{ij} = K/N > 0$  的形式。可以定义序参量  $re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$ ，此处  $0 \leq r(t) \leq 1$  用来测量整个系统的

同步程度， $\psi(t)$  表示平均相位。进一步可将 (13) 式简化为：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), i = 1, \dots, N \quad (14)$$

从 (14) 式可知，振子受到整个系统的平均相位  $\psi(t)$  的强度为  $Kr$  的耦合作用。关于 Kuramoto 平均场同步模型的理论推导以及数值计算详细过程参见 Kuramoto 在 1975 年和 1984 年发表的相关文献<sup>[68, 69]</sup>。

## 4.2. 空间网络上的同步模型

伴随空间网络的兴起和不断发展，出现了大量空间网络上的同步现象研究工作。空间网络的一个特点在于引入了节点之间的空间地理因素。容易知道系统出现同步现象的阈值  $K_c$  主要受到耦合矩阵  $K_{ij}$  的影响。其中，被广泛讨论的耦合方式主要包括平均场耦合、最近邻居耦合、层次耦合以及随机长程耦合。一个自然的想法是振子之间幂律方式的耦合作用是否能够出现同步现象。事实上幂律方式耦合作用的两个极端情况分别对应 Kuramoto 讨论的平均场耦合 ( $K_{ij} = K/N$ ) 和 Strogatz 等人讨论的最近邻居耦合 (对最近的耦合振子  $K_{ij} = K$ ，其它的耦合振子  $K_{ij} = 0$ )<sup>[70]</sup>。因而，对幂律方式耦合作用的讨论具有理论完善意义。

Chowdhury 等人利用自旋波的方法讨论了具有长程幂律耦合作用情况下的同步现象，并且给出了相关的理论计算和数值模拟结果<sup>[67]</sup>。他们将振子均匀地分布在一维的环上，振子  $i$  和  $j$  之间的耦合强度  $K_{ij}$  满足  $K_{ij} = K/r_{ij}^\alpha$ ，其中  $r_{ij}$  是振子  $i$  和  $j$  之间的网格距离。于是可以得到如下的同步模型：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K \sum_{s=1}^{N-1} \frac{1}{s^\alpha} [\sin(\theta_{i+s} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-s} - \theta_i)], i = 1, \dots, N \quad (15)$$

注意模型中采用循环边界条件即满足  $s + N \equiv s$ 。若有  $|\Delta\theta_{ij}(t_0 + T) - \Delta\theta_{ij}(t_0)| < 2\pi$  即振子  $i$  与  $j$  的相位差在任意长的时间段内都不会超过  $2\pi$ ，则称振子  $i$  与  $j$  发生同步，其中  $\Delta\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$ 。

与 Kuramoto 模型类似，可以用序参量  $\Psi_{EA} = \lim_{t-t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i[\theta_j(t) - \theta_j(t_0)]} \right|$  定义整个系统的同步程度。显

然，当  $\Psi_{EA} = 1$  时系统处于完全同步的状态。Chowdhury 等人还使用  $|\Psi_{ph}(t)|$  测量整个系统的同步程度，

其中  $\Psi_{ph}(t)$  满足  $\Psi_{ph}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}$ 。同样地，当  $|\Psi_{ph}| = 1$  时整个系统处于完全同步的状态。由于整个系统很难处于完全同步状态，因此通常考察整个系统同步程度  $\langle |\Psi_{ph}(t)| \rangle_t$  随着时间的演化。为了方便讨论，同时还引入了相位相关函数  $C_{ij} = \langle e^{i(\theta_i - \theta_j)} \rangle$ 。采用自旋波的方法对其进行分析可以知道当  $N$  趋于无穷时，距离为  $r$  的两个振子之间的相位相关函数  $C(r)$  与耦合幂指数  $\alpha$  之间满足如下关系：

$$C(r) \begin{cases} = 1, & \alpha \leq 1, \\ = C_\infty \exp[-1/K^2 \xi(\alpha) r^{3-2\alpha}], & 1 < \alpha < 3/2, \\ \propto r^{-1/8\pi^2 K^2}, & \alpha = 3/2, \\ = \exp[-r^{2\alpha-3}/K^2 \xi(\alpha)], & 3/2 < \alpha (\neq 2) < 5/2, \\ = \exp[-r/2\pi^2 K^2], & \alpha = 2. \end{cases} \quad (16)$$

其中， $\xi(\alpha) = \pi c^2 / \sin(\pi\alpha) \Gamma(3-2\alpha)$ ，常数  $c = 2 \sin(\pi\alpha/2) \alpha \Gamma(-\alpha)$ ，同时  $C_\infty = e^{-\langle \Delta\theta_\infty^2 \rangle}$ 。从(16)式可以看出当  $\alpha > 3/2$  时，振子之间的相位相关函数  $C(r)$  随着距离  $r$  指数衰减。最终可以得到测量整个系统同步程度的序参量指标  $|\Psi_{ph}|$  随幂指数  $\alpha$  的函数关系，其理论结果如图 13 所示，其中参数  $K$  取值为 1。不难看出  $\alpha = 3/2$  时系统的同步程度降低到 0，意味着该模型能够产生同步现象的临界幂指数为  $\alpha_c = 3/2$ 。Chowdhury 等人模拟了不同规模大小的一维环上的同步现象，结果如图 14 所示，其中参数  $K$  取值为 1。图中曲线由上到下对应的网络规模分别为：正方形-256，圆圈-1024，三角-4096，加号-8192，菱形-16384。结果显示系统能够产生同步现象的临界值为  $\alpha_c = 3/2$ ，与理论计算结果相吻合。

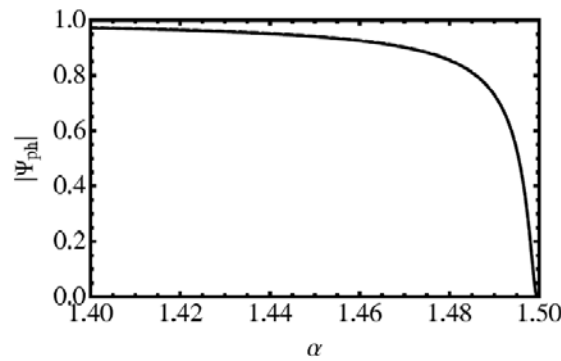


图 13 系统同步程度  $|\Psi_{ph}|$  与幂指数  $\alpha$  的函数关系<sup>[67]</sup>

曾安等人讨论了粗粒化对空间网络上系列动力学过程的影响<sup>[71]</sup>。首先按照如下步骤构建一个有限能量约束的粗粒化后的空间网络：

1. 构造一个  $N$  个节点的环，其中每个节点和相邻两个节点存在短程连边。同时假定网络中的总能量约束为  $\Lambda = cN$ ；
2. 选取一个区间宽度  $W$  对初始环进行粗粒化，将初始环上的距离分为  $N_{\max}/W$  部分。其中，第  $m$

部分包括的网格距离为  $(m-1)W+1, (m-1)W+2, \dots, mW$ ;

3. 随机选取一个节点  $i$ ，以  $P(r) = ar^{-\delta}$  方式产生一个距离  $r$ ，其中  $a$  由  $\sum_{r=2}^{N_{\max}} P(r) = 1$  决定；
4. 找出  $r$  所属区间，然后从该区间中随机挑出一个节点  $j$ 。在  $i$  和  $j$  之间产生一条长程连边，同时按照长程连边的长度减少初始总能量；
5. 重复以上步骤，直到总能量  $\Lambda$  耗尽。

已知特征值比率  $R = \lambda_N / \lambda_2$  可以衡量该粗粒化后的空间网络的同步能力，其中  $\lambda_N$  和  $\lambda_2$  分别为相应的拉普拉斯矩阵的第  $N$  个特征值和第 2 个特征值，因此通过计算不同幂指数  $\delta$  对应的空间网络的同步能力，能够得到网络同步能力最强的最优幂指数  $\delta$ 。计算可知网络同步能力  $R$  与幂指数  $\delta$  的关系如图 15 所示，其中网络规模大小为  $N = 1000$ 。当网络规模足够大的时候最优幂指数近似为  $3/2$ 。

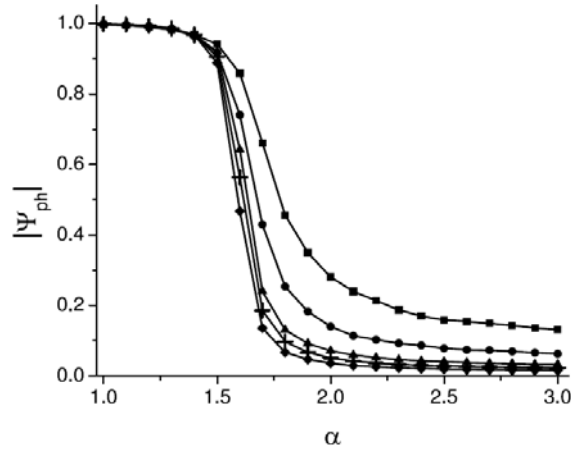


图 14 系统同步程度  $|\Psi_{ph}|$  与网络规模的关系<sup>[67]</sup>

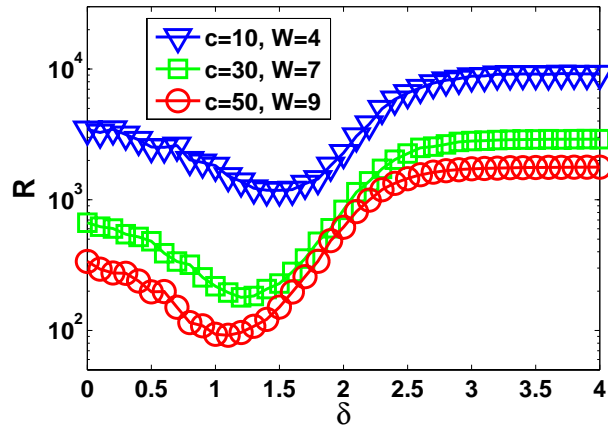


图 15 曾安等人模型中同步能力模拟结果<sup>[71]</sup>

Bradde 等人讨论了空间因素对复杂网络中的相变临界值的影响<sup>[72]</sup>。考虑将一个  $N$  个节点的网络嵌入到一个  $d$  维空间中，每个节点都有一个位置  $\vec{r}_i$ 。其中，节点  $i$  和  $j$  之间存在连边的概率满足下式：

$$p_{ij} = \frac{\theta_i \theta_j J(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}{1 + \theta_i \theta_j J(\vec{r}_i, \vec{r}_j)} \square \theta_i \theta_j J(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (17)$$

此处假定  $[\max_i(\theta)]^2[\max_{\vec{r}_i, \vec{r}_j}(J(\vec{r}_i, \vec{r}_j))] \leq 1$ ，并且  $J(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$  只与节点  $i$  和节点  $j$  之间的距离有关，即

$J(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = J(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ 。不难得到节点  $i$  的度  $k_i$  服从泊松分布，其期望  $\bar{k}_i = \sum_j p_{ij}$ 。通过概率矩阵

$P = \{p_{ij}\}_{ij=1, \dots, N}$  的特征根可以得到该空间网络上的动态过程的临界值。同样也可以通过计算该空间网络的特征值比率  $R$  进而得出其同步能力。

### 4.3. 同步小结

同步现象是动态系统中存在的典型特征之一，在生物、化学、物理以及社会系统中都广泛存在并且起着重要作用。继 Kuramoto 同步模型之后存在大量的后续工作，其中一个分支就是讨论网络上的同步现象。与其他网络不同，空间网络嵌入了空间地理位置因素，因而研究空间网络中的同步现象既具有理论完善作用，也具有很强的现实意义。本章我们简单地回顾和总结了近年来空间网络上同步现象的相关研究工作。不难发现空间网络上同步现象的研究较其他动力学过程而言还相对不足，亟待更多的探索 and 不断发展。

## 5. 空间网络上的疾病传播

### 5.1. 空间网络疾病传播模型

近十年，人类社会频频爆发在世界范围内传播的大型传染病，如2003年的SARS、2005年的H5N1，以及刚过去的2009年爆发的H1N1。当这些大型传染病爆发时，疾病动力学的理论研究能够为制定预测，免疫以及疫苗使用等等政策提供依据。研究疾病如何传播的理论模型加深了我们对疾病动力学的认识。在复杂网络上研究疾病的传播过程已经成为了研究疾病传播的一个重要方向，并有着广泛的运用领域，包括疾病生理学，计算机病毒的传播，以及谣言传播等。

复杂网络上关于疾病传播主要研究传播机制和网络拓扑结构之间的相互影响。前人的研究大多数假设传播行为是由接触过程 (contact process) 或反应过程 (reaction process) 所驱动的。所谓接触传播是指在每一步时间内疾病由被感染的个体传播到该个体的一个邻居，而反应过程则是传播到被感染个体的所有邻居。在这些传播机制下，大量的工作讨论了不同的网络拓扑结构中疾病传播所表现出来的动力学行为，显示网络的拓扑结构对疾病的传播有着重要影响。使用平均场近似理论和数值模拟方法，这类工作在规则网，随机网和小世界网上发现疾病传播的动力学过程中存在着一个相变点：只有当疾病的有效传播率超过某一临界值后，演化过程中感染人群才能保有一定的比例；若有效传播率低于该临界值，疾病在演化过程中最终会消亡。另一方面，大量实际网络度分布具有无标度特性，研究指出在无标度网上不管有效传播率多小，疾病在演化过程中都不会完全消亡。

然而，在一个时间段内各节点只会和它的一部分邻居产生相互作用，因此接触过程或反应过程所描述的传播机制就显得太过粗糙。因而，需要对传播机制进行更深入的研究，如考虑流驱动的传播机

制，提出基于接触传播的新机制。另一个很值得研究的问题是：随着个体间相互作用或相互接触而传播的疾病动力学行为是和个体的空间行动模式紧密联系在一起的。因此，个体的行走模式对疾病传播的动力学行为会产生有趣的影响，而这种影响在以前的工作中并没有得到研究。

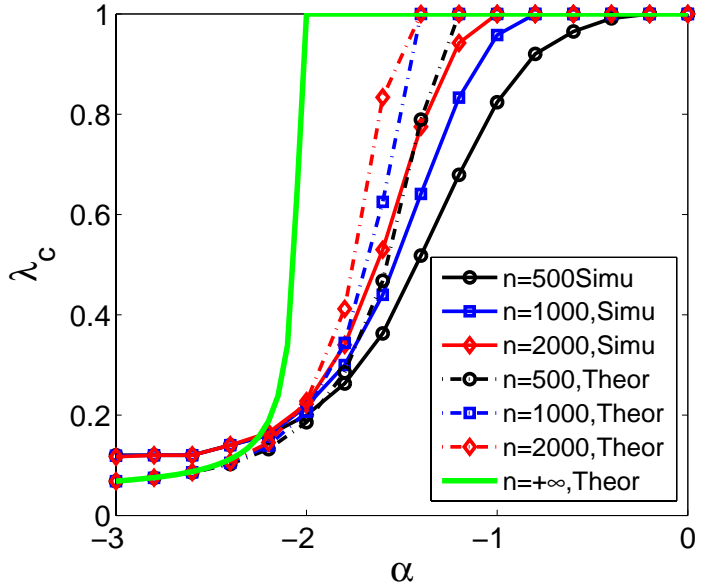


图 16  $\lambda_c$  在一维上的模拟结果及其理论计算结果<sup>[73]</sup>

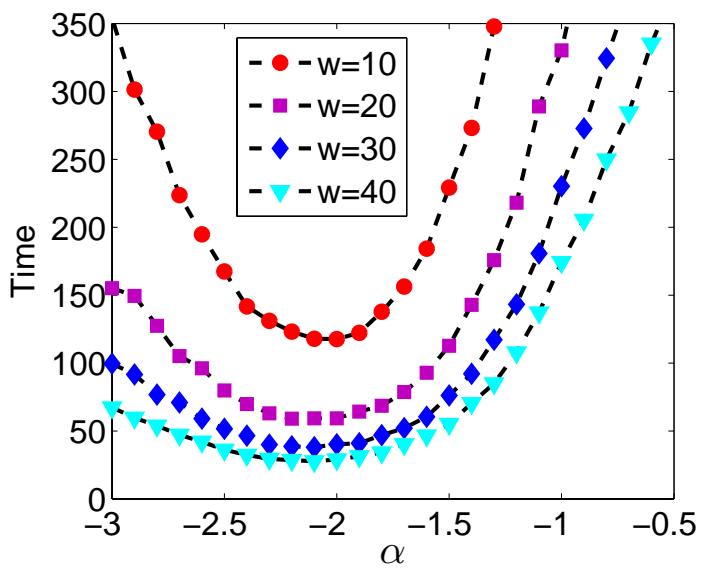


图 17 一维列维行走模式下 SI 模型疾病传播速度<sup>[73]</sup>

胡延庆等<sup>[73]</sup>研究了列维行走模式 (Levy Flights) 对疾病传播的影响。所谓列维行走模式即人类移动或者动物迁徙时，在单位时间内行走的距离服从  $P(d) \sim d^\alpha$  ( $-3 \leq \alpha < -1$ ) 的幂率分布。大量实证研究总结出动物觅食、迁徙和人类旅游近似服从幂指数  $\alpha = -2$  的列维行走模式。考虑具有  $n$  个节点的环，假定其所有节点列维行走总距离为  $W = \omega n$ 。随机挑选一个节点，按照  $P(d) \sim d^\alpha$  的概率选取距离  $d$  作为该节点的长程连接，重复该过程直到所有长程连边的长度之和为  $W$ 。按此方法可以构建出具有列维行走模式的一维加权网络。根据列维行走模式的假定，节点  $i$  与节点  $j$  之间连边的权重  $\omega_{ij}$  与其距离

$d_{ij}^\alpha$  成比例。显然有下式成立：

$$\begin{cases} \omega_{ij} \sim d_{ij}^\alpha \\ \sum_{i=1, j=1}^n \omega_{ij} d_{ij} = W \end{cases} \quad (18)$$

在上述一维加权网络上考虑以 SIS 模型为背景的疾病传播问题。在 SIS 疾病传播模型中，节点感染的概率为  $\nu$ ，相对应地在加权网络中，感染概率为  $1 - (1 - \nu)^{\sum_{j \in I} \omega_{ij}}$ ，其中  $I$  为网络中染病节点的集合。

通常将疾病传播强度  $\lambda$  定义为  $\lambda = \frac{\nu}{\delta}$ ，其中  $\delta$  为染病节点康复的概率，不失一般性令其等于 1。用  $\lambda_c$  表示疾病在该加权网络中的传播阈值，当疾病的传播强度  $\lambda$  大于传播阈值  $\lambda_c$  时，疾病会快速的传播开来；

当疾病的传播强度  $\lambda$  小于传播阈值  $\lambda_c$  时，疾病会很快消亡。假定  $\rho$  为网络中传病节点的比例，根据平均场理论，SIS 模型的动力学方程为  $\frac{d\rho}{dt} = -\rho + [1 - (1 - \nu)^{\rho \frac{\omega}{E(d)}}](1 - \rho)$ ，其中  $E(d)$  为一次列维行走距离

的期望。可以求得传播阈值如下：

$$\lambda_c = \begin{cases} 1, & \alpha \geq -2 \\ \frac{1}{s} = \frac{E(d)}{\omega} \approx \frac{z(\alpha)}{\omega z(\alpha - 1)}, & \alpha < -2 \end{cases} \quad (19)$$

其中  $z(\alpha) = \sum_{d=1}^{+\infty} d^\alpha$  是 Riemann Zeta 函数。关于  $\lambda_c$  的结果如图 16 所示，可以看出  $\lambda_c$  在  $\alpha = -2$  处存在相变。在上述加权网络中讨论 SI 模型可知疾病传播速度在  $\alpha = -2$  最高，终止时刻  $T$ （所有节点全部被感染）与幂指数  $\alpha$  的关系如图 17 所示。

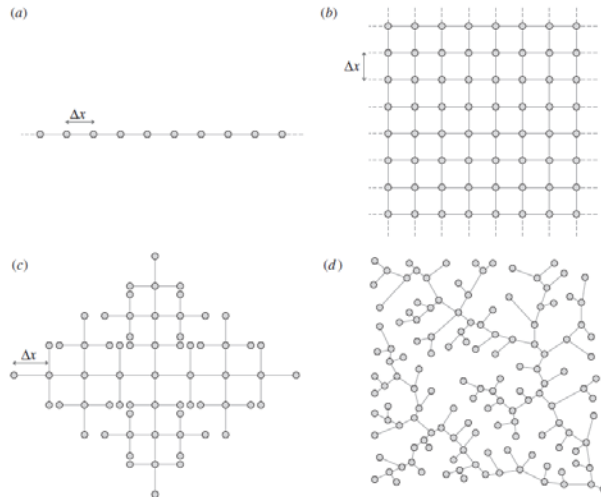


图 18 Bertuzzo 等人使用的四种疾病传播网络结构<sup>[76]</sup>

Riley 等<sup>[74]</sup>对美国手足口病爆发进行了模拟进而提出了一些有效建议来控制该疾病的爆发。Keeling 等<sup>[75]</sup>以 SIR 模型为基础，分别讨论了人类交流（Human Commuters）和牛群移动（Cattle Movements）等疾病传播问题。他们的 SIR 模型中不仅考虑了节点的流动性，而且也考虑了白天与夜

晚在疾病传播方面的差别。白天人们可能到处移动，而夜晚通常假定人们都在家，这两种情况对疾病的传播概率产生不同的影响，这种影响表现为不同的传染概率。

在人类的发展史上，霍乱病毒造成了许多负面影响，研究这种病毒的传播对人类生存具有重要意义。Bertuzzo 等<sup>[76]</sup>以 SIR 模型作为基础，分别在四种网络上对霍乱病毒的传播进行了研究。其中，抽象的网络节点代表疾病可以传播的水生环境和人类的活动场所（城市、乡村等），连边代表各种活动之间的联系，属于典型的水文连接，而连边的方向则由水流方向决定。图 18 给出了四种具体的网络结构：(a) 一维网格、(b) 二维网格、(c) Peano 网络和 (d) OCN。通过在变量中加入水生环境中霍乱病毒的浓度，从而可以得到病毒传播的如下动力学方程：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu(H - S) - \beta \frac{B}{K + B} S \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{B}{K + B} S - (\gamma + \alpha + \mu) I \\ \frac{dB}{dt} = -\mu_B B + \frac{p}{W} I \end{cases} \quad (20)$$

Riley<sup>[77]</sup>回顾了麻疹、手足口病、大流行型流感和天花四种常见疾病和研究这四种疾病的不同方法，即补丁模型、距离传播模型、多种群模型和网络模型。在研究中发现，家庭在人类疾病传播中扮演重要的角色，比如对于天花和流感的传播，建立一个包含家庭在内的模型对于研究疾病传播有重要的意义。在病毒传播的过程中，宿主的移动过程十分重要，对于那些直接传播的病毒，容易染病的人只有与那些带菌的宿主接触才能被传染。图 19 给出了疾病传播的四种不同模型，A 图表示的是“补丁”模型，在这种模型中所有的个体在一个“补丁”中。在这种情况下，疾病的传播能力是人的家与传染病补丁块之间距离的函数；B 图表示距离传播模型，在这个模型中，疾病的传播与个体有密切的关系，并且每一个研究的个体都有明确的地理位置，同时假定任意给定的染病个体可以传染一定范围内的每一个个体；C 图表示多种群模型，在这种模型中，疾病的传播能力由群体中的个体决定；D 代表网络传播模型，这种模型与多种群模型类似，在模型中，疾病的传播能力是零，除非容易被传染疾病的人在一定的范围内。很多现有的空间网络模型包含了个体的年龄、住房位置等信息，但是它们都没有包含人口统计过程，即所有的个体出生、死亡和老化都没有考虑在内。在以后的研究中，为了使研究更贴近真实的情况，可以在这些方面加以考虑。

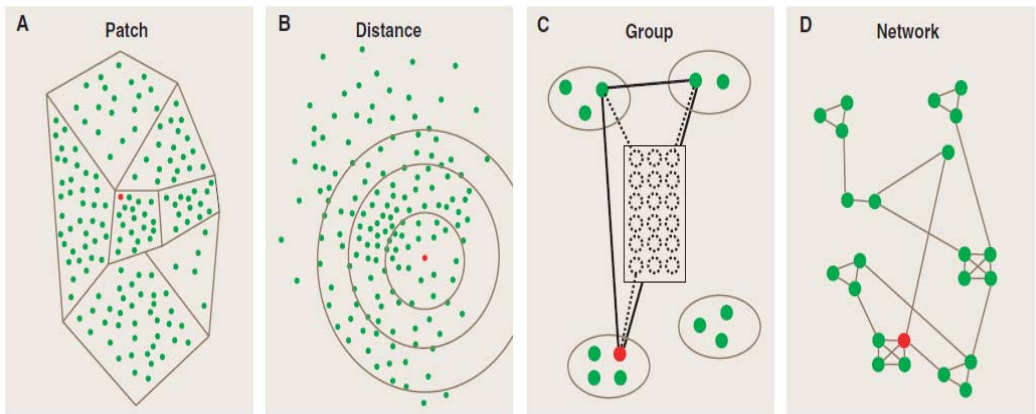


图 19 四种不同的疾病传播模型<sup>[77]</sup>



## 5.2. 疾病传播小结

从古至今各种各样的传染病不断地威胁着人类健康和生存,对疾病传播的研究也是人类发展和进步的需要,而疾病传播模型能够为有效控制疾病传播做出重要贡献。疾病传播模型的发展经历了从简单到复杂、从高度简化到越来越接近现实情况,虽然很多新的模型仍然是以 SIS 或 SIR 模型为基础,但都有很多新发展。近些年由于空间网络研究的迅速发展,疾病传播模型也放到了空间网络上。在传播模型中加入列维行走、考虑个体的移动情况等等都丰富完善了疾病传播模型。

## 6. 总结与展望

本文从实证分析和理论模型两个方面,对国内外空间网络的结构与功能的相关研究工作进行了简要综述。对 社会网络、Internet 网、交通运输网络以及其它一些空间网络上的重要实证工作进行了简单介绍,同时对空间网络上的导航、同步现象以及疾病传播等动态过程进行了回顾与总结。除了文中提到的一些研究方向,空间网络上还存在着许多开放性的问题。其中,空间网络的演化这一问题尽管在上世纪 70 年代就已经被提出来,但是至今仍未得到很好地解决。另外,关于最优空间网络结构的探讨也会是未来一个重要的研究方向。由于本文作者们知识的局限性,相信还有国内外很多同行的重要研究成果都没有综述到,文中图片引自对应的原文,图中符号与本文不协调的地方在文中都做了相应解释,对读者造成的不便之处,还请见谅。

### 参考文献:

- [1] Erdős P, Rényi A, On random graphs[M], Publicationes Mathematicae, 1959,6, 290–297.
- [2] Erdős P, Rényi A, On the evolution of random graphs[M], Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 1960, 5, 17–61.
- [3] Watts D J, Strogatz D H, Collective dynamics of small-world networks[J], Nature, 1998, 393:440.
- [4] Barabási A L, Albert R, Emergence of scaling in random networks[J], Science, 1998, 286:509–511.
- [5] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2006.
- [6] 方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等, 一门崭新的交叉科学:网络科学(上) [J], 物理学进展, 2007, 27 (3): 239-443.
- [7] 方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等, 一门崭新的交叉科学:网络科学(下) [J], 物理学进展, 2007, 27 (4): 361-448.
- [8] Zhang Z, Chen L, Zhou S, et al. Analytical solution of average path length for Apollonian networks[J], Physical Review E, 2008, 77: 017102.
- [9] Yan G, Zhou T, Hu B, Fu Z, and Wang B, Efficient routing on complex networks[J], Phys. Rev. E, 2006, 73, 046108.
- [10] Lu L, Zhou T, Link Prediction in Complex Networks: A Survey [J], arXiv: 1010.0725.
- [11] Wu Y, Xiao J, Wu Z, Ma B, Yang J, "Research on the growing process of short message networks" Acta Physica Sinica, 2007, 56(4):2037-2041.
- [12] Zhou T, Kuscsik Z, Liu J, Medo M, Wakeling J R, Zhang Y C, Solving the apparent diversity-accuracy dilemma of recommender systems[J], PNAS March 9, 2010 vol. 107 no. 10 4511-4515.
- [13] Zhu C, Xiong S, Tian Y, Li N, Jiang K, Scaling of Directed Dynamical Small-World Networks with Random Responses[J], Phys. Rev. Lett. 2004, 92, 218702.

- [14] Li X, Wang X, Chen G, Pinning a complex dynamical network to its equilibrium [C], IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, Regular Papers, 2004, vol. 51, pp. 2074.
- [15] Xu X, Zhang J, Small M, Superfamily phenomena and motifs of networks induced from time series [J], PNAS, 2008, vol. 105 no. 50 19601-19605.
- [16] Wang Li, Zhu C, Gu Z, Scaling of critical connectivity of mobile ad hoc networks [J], Phys. Rev. E, 2008, 78, 066107.
- [17] Liben-Nowell D, Novak J, Kumar R, et al. Geographic routing in social networks [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2005, 102(33): 11623.
- [18] Adamic L, Adar E. How to search a social network [J], Social Networks, 2005, 27(3): 187-203.
- [19] Lambiotte R, Blondel V D, De Kerchove C, et al. Geographical dispersal of mobile communication networks [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008, 387(21): 5317-5325.
- [20] Goldenberg J, Levy M. Distance Is Not Dead: Social Interaction and Geographical Distance in the Internet Era [J]. 2009.
- [21] Hu Y, Wang Y, Li D, et al. Maximizing entropy yields spatial scaling in social networks [J], Arxiv preprint arXiv: 1002.1802, 2010.
- [22] Yook S H, Jeong H, Barabási A L. Modeling the Internet's large-scale topology [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2002, 99(21): 13382.
- [23] Barthélemy M. Crossover from scale-free to spatial networks [J]. EPL (Europhysics Letters). 2003, 63: 915.
- [24] Csányi G, Szendrői B. Fractal-small-world dichotomy in real-world networks [J]. Physical Review E. 2004, 70(1): 16122.
- [25] Barthelemy M, Gondran B, Guichard E. Spatial structure of the internet traffic [J]. Physica A. 2003, 319: 633-642.
- [26] Warren C P, Sander L M, Sokolov I M. Geography in a scale-free network model [J]. Physical Review E. 2002, 66(5): 56105.
- [27] Guimera R, Mossa S, Turtchi A, et al. The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities' global roles [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2005, 102(22): 7794.
- [28] Guimera R, Amaral L. Modeling the world-wide airport network [J]. The European Physical Journal B. 2004, 38(2): 381-385.
- [29] Yang H, Nie Y, Fan Y, et al. Scaling properties in spatial networks and its effects on topology and traffic dynamics [J], EPL, 2010, 89: 58002.
- [30] Hayashi Y. A review of recent studies of geographical scale-free networks [J]. Information and Media Technologies. 2006, 1(2): 1136-1145.
- [31] Xu Z, Harriss R. Exploring the structure of the US intercity passenger air transportation network: a weighted complex network approach [J]. GeoJournal. 2008, 73(2): 87-102.
- [32] 田丽霞. 基于图论的复杂脑网络分析 [J]. 北京生物医学工程. 2010, 29(1): 96-100.
- [33] Milgram S, the Small-world Problem [J]. Psychology Today, 1967, 2: 60.
- [34] Travers J and Milgram S, An experimental study of the small world problem [J], Sociometry, 1969, 32: 425.
- [35] Kleinfeld J, Could it be a Big World After All? The "Six Degrees of Separation" Myth [J], Society, 2002.

- [36] Dodds P S , Muhamad R and Watts D J, An Experimental Study of Search in Global Social Networks[J], Science,2003 ,301:827.
- [37] <http://smallworld.sociology.columbia.edu>.
- [38] Watts D J and Strogatz S H, Collective dynamics of small world Networks [J], Nature, 1998, 393: 440-442.
- [39] Watts D J, Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- [40] Newman M E J, Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results [J], Phys. Rev. E, 2001, 64:016131.
- [41] Newman M E J, Scientific collaboration networks. II. Shortest paths, weighted networks, and centrality [J], Phys. Rev. E, 2001, 64:016132.
- [42] Kleinberg J, Navigation in a small world [J], Nature, 2000, 406: 845.
- [43] Kleinberg J, The Small-World Phenomenon: An Algorithmic Perspective[C], Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing, 2000, 163-170.
- [44] Martel C, Nguyen V, Analyzing Kleinberg's (and other) Smallworld Models[C], in Proceedings of the Symposium on Principles of Distributed Computing, ed. Kutten, S. (ACM Press, New York), 2004:179–188.
- [45] Carmi S, Carter S, Sun J, Ben-Avraham D, Asymptotic behavior of the Kleinberg model[J], PRL,2009, 102:238702.
- [46] Caretta Cartozo C, De Los Rios P, Extended navigability of small world networks: exact results and new insights [J], PRL, 2009, 102:238702.
- [47] Roberson M R, Ben-Avraham D, Kleinberg navigation in fractal small-world networks[J], Phys. Rev. E, 2006, 74:17101.
- [48] Kleinberg J, Small-World Phenomena and the Dynamics of Information[C], Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), 2001, 14.
- [49] Kleinberg J, Complex networks and decentralized search algorithms[C], In Intl. Congress of Mathematicians, 2006.
- [50] Kumar R, Liben-Nowell D, Novak J, Raghavan P, Tomkins A, Theoretical Analysis of Geographic Routing in Social Networks, Technical Report MIT-LCS-TR-990 (MIT Press, Cambridge, MA), 2005.
- [51] Killworth P, Bernard H, Reverse small world experiment [J], Social Networks, 1978, 1.
- [52] Faloutsos M, Faloutsos P, and Faloutsos C, On power-law relationships of the internet topology[C], Proceedings of ACM SIGCOMM, 1999.
- [53] Albert R, Jeong H, Barabasi A-L, Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web[J], Physica A, 1999, 401:130.
- [54] Broder A, Kumar R, Maghoul F, Raghavan P, Rajagopalan S, Stata R, Tomkins A, Wiener J, Graph structure in the web,Comput. Netw. 2000, 33; 309.
- [55] Jeong H, Tombor B, Albert R, Oltvai Z N, and Barabasi A L, The large-scale organization of metabolic networks[J],Nature,2000,407:651.
- [56] Jeong H, Mason S, Barabasi A L, and Oltvai Z N, Lethality and centrality in protein networks[J],Nature,2001,411:41.
- [57] Guardiola X, Guimera R, Arenas A, Diaz-Guilera A,Streib D, Amaral L A N, Macro-and micro-structure of trust networks[J], cond-mat/0206240.
- [58] Cohen R, Havlin S, Scale-Free Networks Are Ultrasmall[J], PRL,2003,90.
- [59] Krioukov M D, Navigating Ultrasmall Worlds in Ultrashort Time [J], PRL,2009,102:058701.
- [60] Kim B J, Yoon C N, Han S K, Jeong H, Path Finding Strategies in Scale-free Networks[J], Phys. Rev.

E,2002,65:027103.

[61] Fraigniaud P, Gavoille C, Christophe Paul, “Eclecticism Shrinks the World”, Technical Report LRI-1376, University Paris-Sud, 2003.

[62] Martel C, Nguyen V, Analyzing Kleinberg’ s (and other) Smallworld Models[C], in Proceedings of the Symposium on Principles of Distributed Computing, ed. Kutten, S. (ACM Press,New York), 2004:179 – 188.

[63]杜丽娟, 史定华, 陈倩, 增长的可导航网络模型。上海大学学报(自然科学版)[J], 2009,Vol. 15. No.1.

[64] Li G, Reis S D S, Moreira A A, Havlin S, Stanley H E, and Andrade, Jr.J S, Towards design principles for optimal transport networks[J], PRL,2010,104:018701.

[65] Bianconi G, Pin P, Marsilli M, Assessing the relevance of node features for network structure [J], Proc. Natl. Acad. Sci., 2009, 106:11433.

[66] Li Y, Zhou D, Hu Y, Zhang J and Di Z, Analytical Solution for Optimal Navigation with Total Cost Restriction[J], 2010, Arxiv preprint arXiv:1007.1281.

[67] Chowdhury D, Cross M C, Synchronization of oscillators with long range power law interactions [J], Phys. Rev. E, 2010, 82:016205.

[68] Kuramoto, Y, in International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, edited by H. Araki, Lecture Notes in Physics No. 30 Springer, New Yorkd,1975: 420.

[69] Kuramoto, Y, Chemical Oscillations, Waves and Turbulence Springer, New Yorkd, 1984.

[70] Strogatz S H, Mirollo R E, Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies [J], Phys. A 1988, 31:143.

[71] Zeng A, Zhou D, Hu Y, Fan Y, Di Z, Dynamics on Spatial Networks and the Effect of Distance Coarse Graining[J], arXiv:1005.4180v1, 2010.

[72] Bradde S, Caccioli F, Dall'Asta L, Bianconi G, Critical fluctuations in spatial complex networks[J], PRL,2010,104: 218701.

[73] Hu Y, Luo D, Xu X, et al. Effects of Levy Flights Mobility Pattern on Epidemic Spreading under Limited Energy Constraint[J], Arxiv preprint arXiv:1002.1332,2010.

[74] Riley S. Coping without farm location data during a foot-and-mouth outbreak[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2010, 107(3): 957.

[75] Keeling M J, Danon L, Vernon M C, et al. Individual identity and movement networks for disease metapopulations[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2010, 107(19): 8866.

[76] Bertuzzo E, Casagrandi R, Gatto M, et al. On spatially explicit models of cholera epidemics [J]. Journal of the Royal Society Interface. 2010, 7(43): 321.

[77] Riley S, Large-Scale Spatial-Transmission Models of Infectious Disease [J], Science, 2007, 316:1298.