3.5[uia,math,sysu,china]设 A 是环.又设对每个素理想 $\mathfrak{p}$,局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 没有非零幂零元,证明 A 也没有非零幂零元.如果每个 $A_{\mathfrak{p}}$ 是整环,问 A 是否一定是整环?

证明

◆ 若对 $\forall\mathfrak{p}\in Spec(A)$,$A_{\mathfrak{p}}$ 没有非零幂零元,则 A 也没有非零幂零元.

设 $x\in\mathfrak{n}$ (A 的小根,幂零元全体),则对 $\forall\mathfrak{p}\in Spec(A)$,$\dfrac{x}{1}$ 为 $A_{\mathfrak{p}}$ 中幂零元,而为 0.于是 $\exists s_{\mathfrak{p}}\in A\setminus\mathfrak{p}, s.t.\ s_{\mathfrak{p}}x=0$,而 $Ann(x)\not\subset\mathfrak{p},\forall\mathfrak{p}\in Spec(A)$.因 $Ann(x)$ 为理想,若 $\neq(1)$,则包含于某一极大(素)理想里头.于是 $Ann(x)=(1)$,而 $x=1\cdot x=0$.

◆ 若 $A_{\mathfrak{p}}$ 是整环,对 $\forall\mathfrak{p}\in Spec(A)$,我们不一定有 A 是整环.

现构造例子说明问题.在整数环中,对 6 的剩余类环 $\{\bar{i}\}_{i=0}^{5}$,有加法和乘法如下

$$\bar{i}+\bar{j}=(i+j)^{-}\quad \bar{i}\cdot\bar{j}=(ij)^{-}$$

乘法表为

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$			$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$				$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$					$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$						$\bar{1}$

而有可逆元集合 $\{\bar{1},\bar{5}\}$,我们的素理想 $\subset\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$,而素理想又为加法子群,故又只能在 $\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\},\{\bar{0},\bar{3}\}$ 中找.

好!她们均为素理想,为什么?我们只要验证 $A\setminus\mathfrak{p}$ 为乘子集(乘法封闭集).

◆ 对 $\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$,我们有乘法表:

	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$		$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$			$\bar{1}$

◆ 对 $\{\bar{0},\bar{3}\}$,我们有乘法表:

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$		$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$			$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$				$\bar{1}$

如此,我们有 $A=\{\bar{i}\}_{i=0}^{5}$ 不是整环 [因 $\bar{2},\bar{3}\neq 0$,而 $\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{6}=\bar{0}$], 而对

$$\mathfrak{p}_1=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\},\mathfrak{p}_2=\{\bar{0},\bar{3}\}$$

有 $A_{\mathfrak{p}_i}$ 为整环.为什么?又得一番讨论:

- ◆ 先看 $A_{\mathfrak{p}_1}$,若 $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\cdot\frac{\bar{b}}{\bar{t}}=\frac{\bar{0}}{\bar{1}}$,其中 $\bar{a},\bar{b}\neq\bar{0}$ [否则显然], 则 $\frac{\overline{ab}}{\overline{st}}=\frac{\bar{0}}{\bar{t}}$,而

$$\exists\bar{s}\in\{\bar{1},\bar{3},\bar{5}\},\ s.t.\ \bar{s}(\overline{ab})=\bar{0}$$

若 $\bar{s}\in\{\bar{1},\bar{5}\}$,即 $\bar{s}$ 可逆,则 $\overline{ab}=\bar{0}$,而

$$(\bar{a},\bar{b})=\{(\bar{2},\bar{3}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{3},\bar{4}),(\bar{4},\bar{3})\}$$

由对称性,只需看下述两种情形:

- ■ $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{2},\bar{3})$,此时 $\bar{a}=\bar{2}$,而 $\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{0}$ 有 $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}=\frac{\bar{0}}{\bar{1}}$;
- ■ $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{3},\bar{4})$,有 $\bar{a}=\bar{4}$,而 $\bar{3}\cdot\bar{4}=\bar{0}$ 有 $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}=\frac{\bar{0}}{\bar{1}}$.

若 $\bar{s}=\bar{3}$,则或 $\overline{ab}=\bar{0}$ 或 $\overline{ab}=\bar{2}$ 或 $\overline{ab}=\bar{4}$.

- ■ $\overline{ab}=\bar{0}$,情形同上;
- ■ $\overline{ab}=\bar{2}$,此时

$$(\bar{a},\bar{b})=\{(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{2},\bar{4}),(\bar{4},\bar{2}),(\bar{4},\bar{5}),(\bar{5},\bar{4})\}$$

由 $\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{0},\bar{3}\cdot\bar{4}=\bar{0}$ 有之;

- ■ $\overline{ab}=\bar{4}$,此时

$$(\bar{a},\bar{b})\in\{(\bar{1},\bar{4}),(\bar{4},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{2},\bar{5}),(\bar{5},\bar{2}),(\bar{4},\bar{4})\}$$

同上,有之.

- ◆ 再看 $A_{\mathfrak{p}_2}$,类似的讨论有 $A_{\mathfrak{p}_2}$ 为整环.证毕.

评注 上述构造的例子能否推广到一般情形? 即若数 $a+1$ 的素因子均为单的 [$a+1=\prod_{i=1}^{n}p_i$,其中 $n\geq 1$,$p_1<p_2<\cdots<p_n$], 则对剩余类环

$$M=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{a}\}$$

有性质

$$\forall\mathfrak{p}\in Spec(M),\ M_{\mathfrak{p}}\text{ 是整环.}$$