

## 2007 级硕士研究生交换代数期末考试题

Uia,Math, Sysu,China  
2008 年 6 月 19 日输入

1. 假定环  $A$  中任意不含在小根中的理想都包含非零幂等元. 证明  $A$  的小根和大根相同.
2. 设  $A$  是一个环,  $\mathfrak{a}$  是  $A$  的一个理想,  $M$  是一个  $A$ -模. 证明  $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$  与  $M/\mathfrak{a}M$  同构.
3. 设  $S$  是环  $A$  的乘法封闭子集,  $M$  是有限生成  $A$ -模. 证明  $S^{-1}M = 0$  当且仅当存在  $s \in S$  使得  $sM = 0$ .
4. 如果  $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ , 那么  $\mathfrak{a}$  没有嵌入素理想.
5. 设  $A \subseteq B$  是环,  $B$  在  $A$  上整, 又设  $f: A \rightarrow Q$  是  $A$  到代数闭域  $Q$  的一个同态. 证明  $f$  可以扩充为  $B$  到  $Q$  之中的同态.

6. 设  $A$  是 Noether 环, 并设  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in A[[x]]$

证明  $f$  是幂零元当且仅当每个  $a_n$  是幂零元

7. 设  $k$  是一个域,  $A$  是有限生成  $k$ -代数. 证明下列陈述等价:

(i)  $A$  是 Artin 环;

(ii)  $A$  是一个有限  $k$ -代数.

8. 设  $M$  是  $A$ -模. 如果  $M$  的有限生成子模构成的任意一个非空集合都有极大元, 那么  $M$  是 Noether 模.

9. 设  $R$  是赋值环但不是域. 证明  $R$  是离散赋值环当且仅当  $R$  是 Noether 环.

10. 证明唯一因子分解整环必为整闭整环.