Hausdorff 测度在 Lipschitz 映射下的变化

Tsu Chin, Chang
Math,Sysu,China

定义 1 设 X 是度量空间,, $A\subset X$, $m\in \bar{R}_+^n$,我们定义 A 的 m-维 Hausdorff 测度为

$$H^m(A)=\lim_{\delta\downarrow 0}H_\delta^m(A)=\sup_{\delta>0}H_\delta^m(A)$$

其中

$$H_\delta^m(A)=\inf_{A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}C_j\subset X}\sum_{j=1}^{\infty}\omega_m\left(\frac{diamC_j}{2}\right)^m$$

这里

$$\omega_m=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

注记 2 1)当 $m=n\in N$ 时, ω_n 恰为 S^n [n 维单位球]之体积.

2)当 $m=n\in N$, $X=R^n$ 时, $\omega_n\left(\frac{diamC_j}{2}\right)^n$ 恰为含 C_j 之最小球的体积.此时,我们就可在"球形范畴"中去取下确界.可以证明 $L^n=H^n$,其中 L^n 为 R^n 中通常之 Lebesgue 测度.

3) $H^m(A)$ 度量了 A 在 m 维意义下的 diameter(直径).

4)据 Caratheodory 条件, H^m 是 Borel 正则的,即所有的 Borel 集都是 H^m-可测的,且 $\forall A\subset X,\exists B\ Borel,s.t.\ A\subset B,H^m(A)=H^m(B)$.

5)注意 Borel 集一般不是 H_δ^n-可测,对 $\forall\delta>0$.你比如 $R_+^2\subset R^2$ 就不是 H_δ^1-可测的.因可取试验集 $S=[0,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$,其中 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{5}}\right)$ 为后文所需.此时 $H_\delta^1(S)=\sqrt{5}\varepsilon<2\sqrt{2}\varepsilon=H_\delta^1(S\cap R_+^2)+H_\delta^1(S\cap\bar{R}_-^2)$

定义 3 设 $(X,\rho),(Y,d)$ 是度量空间, $\phi:X\to Y$ 若满足

$$\exists L>0,s.t.\ x,y\in X\Rightarrow d\left(f(x),f(y)\right)\le L\rho(x,y)\qquad(*)$$

则称 ϕ 为 Lipschitz 函数,其中满足(*)的最小 L 记为 $Lip(\phi)$,称为 ϕ 的 Lipschitz 常数.

注记 4 1)在诱导拓扑下,可定义 $\phi:A\to Y$ 是 Lipschitz 函数.

2) 当 $Y=R^n$ 时, 对 $\phi:A\to Y$ 有延拓 $\Phi:X\to R^n$,这可很简单地定义

$\Phi(x)=\sup\limits_{y\in A}\left[\phi(y)+L\rho(x,y)\right]$,其中 $L=Lip(\phi)$.

3)若 $X=Y=R^1$,熟知 ϕ Lipschitz $\Rightarrow \phi$ 绝对连续 $\Rightarrow \phi$ 有界变差 $\Rightarrow \phi$ 几乎处处可微,最后的 $\Rightarrow$ 用 Jordan 分解.

定理 5 若 $U\subset R^p$ 为开集,$\phi:U\to R^q$ 为 Lipschitz 函数,$E\subset U, H^n(E)=0$,则 $H^n(\phi(E))=0$.

证明 由 $H^n(E)=\lim\limits_{\delta\downarrow 0}H_\delta^n(E)=\sup\limits_{\delta>0}H_\delta^n(A)=0$ 知

$$H_\delta^n(E)=0, \forall\delta>0$$

而对任意固定的 $\delta>0$,[由 $H_{\delta/L}^n(E)=0$]

$$\forall\varepsilon>0, \exists\{C_j\}\subset U, diamC_j<\frac{\delta}{L}, s.t. \sum_{j=1}^{\infty}\omega_n\left(\frac{diamC_j}{2}\right)^n<\frac{\varepsilon}{L^n}$$

其中 $L=Lip(\phi)$ 为 Lipschitz 常数.

于是有 $\phi(E)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\phi(C_j)$,而 $daim\phi(C_j)\le LdiamC_j<\delta$,有

$$H_\delta^n(\phi(E))\le\sum_{j=1}^{\infty}\omega_n\left(\frac{diam\phi(C_j)}{2}\right)^n<\varepsilon$$

于是

$$H^n(\phi(E))=\sup_{\delta>0}H_\delta^n(\phi(E))=0 \qquad ■$$

推论 6 该结论可推广到局部 Lipschitz 函数上去,这只要注意到 R^p 是可分的及

$$\left[H^n(E_j)=0,\forall j\right]\Rightarrow H^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=0$$