中山大学 2007 级硕士研究生<<现代偏微分方程>>考试题

(选做四题,每题 25 分.如五题全做则按得分最低的四题记分)

Pure Math --- C.C.Chang

To Professor Cui Shangbin,from him I've acquired
basic rules of PDE and the passion for mathematical research.

E-mail: uia.china@gmail.com

1. 设 Ω 是 R^n 中的边界充分光滑的有界区域.又设 m,k 为非负整数,$1\le p<q\le\infty$,$0<\mu<1$.

(1)试问当 m,p,k,q 满足什么条件时,关系式 $W^{m,p}(\Omega)\subset W^{k,q}(\Omega)$ 成立?又当 m,p,k,μ 满足什么条件时,关系式 $W^{m,p}(\Omega)\subset C^{k,\mu}(\Omega^-)$ 成立?

(2)设 $1\le p<q\le\infty$,且 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{1}{n}$. 用 B_R 表示球心在原点,半径为 R 的开球.证明:$\exists\theta=\theta(n,p,q)\in(0,1)$ 及 $C=C(n,p,q)>0$,使得对任意 $R>0$ 成立:

$$\|u\|_{L^q(B_R)}\le C\left(R^{1-\theta}\|\nabla u\|_{L^p(B_R)}+R^{-\theta}\|u\|_{L^p(B_R)}\right),\forall u\in W^{1,p}(B_R)$$

问 $\theta=?$

证明

(1)(a)当 $m\ge k,m-\frac{n}{p}\ge k-\frac{n}{q}$ 时,$W^{m,p}(\Omega)\subset W^{k,q}(\Omega)$.

这是因为由 Sobolev 嵌入定理,$W^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^*}(\Omega),1\le p<n$.若 $u\in W^{m,p}(\Omega)$,则

$$\forall\alpha\in Z_+^n,|\alpha|\le m-1,D^\alpha u\in W^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^*}(\Omega)$$

而有 $u\in W^{m-1,p^*}(\Omega)$,其中 $\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$,同样的,有 $u\in W^{m-2,p^{**}}(\Omega)$,其中 $\frac{1}{p^{**}}=\frac{1}{p^*}-\frac{1}{n}=\frac{1}{p}-\frac{2}{n}$.经过 $m-k$ 步之后,有 $u\in W^{k,p'}(\Omega)$,其中 $\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}-\frac{m-k}{n}$.即 $m-\frac{n}{p}=k-\frac{n}{p'}$.即有当 $m\ge k,m-\frac{n}{p}\ge k-\frac{n}{q}$ 时,有 $q\le p'$,而 $u\in W^{k,q}(\Omega)$.

(b)当 $m>k,(m-k)p>n,0\le\mu\le 1-\frac{n}{(m-k)p}$ 时,由 Sobolev 嵌入定理

$$\forall\alpha\in Z_+^n,|\alpha|\le k,D^\alpha u\in W^{m-k,p}(\Omega)\subset C^{1-\frac{n}{(m-k)p}}(\Omega^-)$$

而有 $u\in C^{k,\mu}(\Omega^-)$.

(2)(a)对 $R=1$ 情形,由于 $1\le p<q\le\infty,\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{1}{n}$ 及 Sobolev 嵌入定理,

$$\exists C=C(n,p,q)>0,s.t.\|u\|_{L^q(B_1)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(B_1)},\forall u\in W^{1,p}(B_1)$$

(b)对 R 之一般情形,我们采用 Rescaling 技术,

$\forall u(x)\in W^{1,p}(B_R)$,作变换 $y=\dfrac{x}{R}$,令 $\tilde{u}(y)=u(yR)=u(x)$,有

$$\left\|\tilde{u}(y)\right\|_{L^q(B_1)}\le C\left\|\tilde{u}(y)\right\|_{W^{1,p}(B_1)}$$

即

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R^{\frac{n}{q}}}\|u(x)\|_{L^q(B_R)}=\left(\int_{B_R}|u(x)|^q\frac{1}{R^n}dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le\left(\int_{B_1}|\tilde{u}(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}=\left\|\tilde{u}(y)\right\|_{L^q(B_1)}\\
&\le C\left\|\tilde{u}(y)\right\|_{W^{1,p}(B_1)}\\
&=C\left[\left(\int_{B_1}|\tilde{u}(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{B_1}|D\tilde{u}(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&=C\left[\left(\int_{B_R}|u(x)|^p\frac{1}{R^n}dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{B_R}|Du(x)|^p R^p\frac{1}{R^n}dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&=C\left[R^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(B_R)}+R^{-\frac{n}{p}}\|u\|_{L^p(B_R)}\right]
\end{aligned}$$

而有

$$\|u\|_{L^q(B_R)}\le C\left[R^{1-\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right)}\|Du\|_{L^p(B_R)}+R^{-\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right)}\|u\|_{L^p(B_R)}\right]$$

取 $\theta=n\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)$,即有所证. ■

2.设 Ω 是 R^n 中的边界充分光滑的有界区域,$n>2$,$c\in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$,$f\in L^2(\Omega)$,$g\in H^1(\Omega)$.考虑边值问题:

$$(D1)\begin{cases}-\Delta u+cu=f,x\in\Omega\\ u=g,x\in\partial\Omega\end{cases}$$

叙述函数 $u\in H^1(\Omega)$ 是问题 $(D1)$ 的弱解的定义,并证明:$\exists c_0>0$,使当 $\|c_-\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}<c_0$ 时,问题 $(D1)$ 存在唯一的弱解.这里 c_- 表示函数 c 的负部即

$$c_-=inf\{c,0\},\forall x\in\Omega$$

证明 (1)弱解的定义: $u\in H^1(\Omega)$ 称为问题 $(D1)$ 的弱解,如果

(a) $\int_\Omega Du\bullet D\psi+cu\psi dx=\int_\Omega f\psi dx$ 对 $\forall\psi\in C_0^\infty(\Omega)$,从而对 $\forall\psi\in H_0^1(\Omega)$ 成立.

(b) $\gamma(u-g)=0$.

(2)弱解的存在唯一性:

作 Hilbert 空间 $H_0^1(\Omega)$ 上的共轭双线性泛函

$$a(\omega,v)=\int_{\Omega}(D\omega\bullet Dv+c\omega v)\,dx$$

则

(a) a 是有界的

$$\left|a(\omega,v)\right|\le\|D\omega\|_{L^2(\Omega)}\|Dv\|_{L^2(\Omega)}+\|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|\omega\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}$$
$$\le\|\omega\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}+C\|\omega\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\le C\|\omega\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

其中第一个不等式利用推广 Holder 不等式,第二个不等式利用 Sobolev 嵌入定理.

(b) $\exists c_0>0$,当 $\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}<c_0$ 时,a 是强制的,

$$a(v,v)=\int_{\Omega}|Dv|^2+cv^2dx\ge\int_{\Omega}|Dv|^2+c\_v^2dx$$
$$\ge\|Dv\|_{L^2(\Omega)}^2-\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2$$
$$\ge\|Dv\|_{L^2(\Omega)}^2-C\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$
$$=\left(1-C\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)\|Dv\|_{L^2(\Omega)}^2-C\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$=\frac{1-C\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}}{2}\|Dv\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1-(2\mu+1)C\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}}{2\mu}\|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\ge min\left\{\frac{1-C\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}}{2},\frac{1-(2\mu+1)C\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}}{2\mu}\right\}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

其中第二个不等式利用推广 Holder 不等式,第三个不等式利用 Sobolev 嵌入定理,最后一个等式中 μ 是 Poincare 不等式中的系数,与 v 无关.

取

$$c_0=\frac{1}{(2\mu+1)C}>0$$

则当 $\left\|c_-\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}<c_0$ 时,a 是强制的.

而 $F(v)=\int_{\Omega}(f-cg)v-Dg\bullet Dv\,dx$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的连续线性泛函,由 Lax-Milgram 定理,,$\exists\,|\,\omega\in H_0^1(\Omega)$ 是成立

$$a(\omega,v)=F(v)$$

即

$$\int_{\Omega}D(\omega+g)\bullet Dv+c(\omega+g)v\,dx=\int_{\Omega}fv\,dx,\forall v\in H_0^1(\Omega)$$

令 $u=\omega+g$,即有其为问题 $(D1)$ 的弱解.

再由 ω 的唯一性,有 u 作为弱解的唯一性. ■

3.设 Ω 是 R^n 中的边界充分光滑的有界区域.又设 $T>0$,记 $Q_T=\Omega\times(0,T)$.再设 $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$,$a_{ij}=a_{ji}$,$c\in L^\infty(\Omega)$,$\varphi\in L^2(\Omega)$,且存在常数 $\mu>0$ 使成立:

$$a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\mu|\xi|^2,\forall\xi\in R^n,\forall x\in\Omega$$

考虑初边值问题:

$$(D2)\begin{cases} u_t = D_j\left(a_{ij}D_i u\right) + cu, x\in\Omega, 0<t<T; \\ u=0, x\in\partial\Omega, 0<t<T; \\ u=\varphi, x\in\Omega. \end{cases}$$

叙述函数 $u\in C\left([0,T),L^2(\Omega)\right)\bigcap C\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)$ 是问题 $(D2)$ 的弱解的定义,并证明:这个初边值问题存在唯一的弱解 $u\in C\left([0,T),L^2(\Omega)\right)\bigcap C\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)$,且当 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ 时,$u\in\left([0,T),H_0^1(\Omega)\right)$.

证明 与第三章给出的习题类似,此处略去.

4.设 Ω 是 R^n 中的边界充分光滑的有界区域,$c\in L^\infty(\Omega)$,$c\geq 0$,$f\in L^p(\Omega)$,其中 $p>\dfrac{n}{2}$.又设 $u\in H^1(\Omega)$ 是下列方程的弱解:

$$(D3) -\Delta u + cu = f, x\in\Omega$$

证明:$\exists C>0$ 使成立:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C|\Omega|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

证明 设 $l=\sup\limits_{\partial\Omega} u_+$, 对 $\forall k>l$,令

$$0\leq\varphi_k=(u-k)_+\in H_0^1(\Omega)$$

作为试验函数代入问题 $(D3)$ 弱解之定义式,有

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi_k dx + \int_\Omega cu\varphi_k dx = \int_\Omega f\varphi_k dx$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\|\varphi_k\|_{L^{2^*}(A(k))}^2 &\leq \|\nabla\varphi_k\|_{L^2(A(k))}^2 = \int_{A(k)}|\nabla\varphi_k|^2 dx = \int_\Omega|\nabla\varphi_k|^2 dx \\ &= \int_\Omega|\nabla\varphi_k|^2 dx + \int_\Omega c\varphi_k^2 dx + \int_\Omega ck\varphi_k dx = \int_\Omega f\varphi_k dx \\ &= \int_{A(k)} f\varphi_k dx \leq \|f\|_{L^p(A(k))}\|\varphi_k\|_{L^{2^*}(A(k))}|A(k)|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

其中 $A(k)=\{x\in\Omega; u(x)\geq k\}$,

从而

$$\|\varphi_k\|_{L^{2^*}(A(k))}\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}|A(k)|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}$$

再

$$\|\varphi_k\|_{L^{2^*}(A(k))}\geq\|\varphi_k\|_{L^{2^*}(A(h))}\geq(h-k)|A(h)|^{\frac{1}{2^*}}$$

其中 $A(h)=\{x\in\Omega; u(x)\geq h\}$ $h>k$.

便有

$$|A(h)|\leq\left(\frac{C\|f\|_{L^p(\Omega)}}{h-k}\right)^{2^*}|A(k)|^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)\cdot 2^*}$$

现

$$\alpha = 2^* = \frac{2n}{n-2} > 0$$

$$\beta = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) \cdot 2^* > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \cdot 2^* = 1$$

注 这里用到条件 $p > \frac{n}{2}$

由 De Giorgi 迭代引理,

$$\left|A(l+d)\right| = 0$$

其中

$$d = C\|f\|_{L^p(\Omega)} \left|A(l)\right|^{\frac{\beta-1}{\alpha}} 2^{\frac{\beta-1}{\alpha}} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)} = C\|f\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}$$

由 $A(k)$ 之定义,即有结论

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C|\Omega|^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \blacksquare$$

5.设 Ω 是 R^n 中的一个区域, $u \in H^1_{loc}(\Omega) \bigcap C(\Omega)$ 是 Laplace 方程 $-\Delta u = 0$ 在 Ω 上的弱下解,即在弱的意义下,在 Ω 上成立 $-\Delta u \leq 0$.证明:对任意 $x_0 \in \Omega$ 和任意 $R > 0$,只要 $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$,就成立:

$$u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u dx$$

其中 ω_n 表示 n 维单位球的体积.

证明 由于 $C_0^2(\Omega)$ 在 $H^1_{loc}(\Omega) \bigcap C(\Omega)$ 中稠,我们有

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \leq 0, \forall 0 \leq \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

即有

$$\Delta u \geq 0, x \in \Omega$$

于是对 $\forall x_0 \in \Omega, \forall \rho \in (0, R)$,有

$$0 \leq \int_{B_\rho(x_0)} \Delta u dx = \int_{\partial B_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n} ds_\rho = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u(x_0 + \rho\omega)}{\partial n} \rho^{n-1} ds_1$$

$$= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + \rho\omega) \cdot \rho^{n-1} ds_1\right] = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u ds_\rho\right]$$

即有 $\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u ds_\rho$ 在 $(0, R)$ 上递减,

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u ds_\rho \leq \lim_{\rho \to 0^+} \left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u ds_\rho\right] = n\omega_n u(x_0)$$

而 $n\rho^{n-1}\omega_n u(x_0) \geq \int_{\partial B_\rho(x_0)} u ds_\rho$,两边对 ρ 从 0 到 R 积分有

$$u(x_0) \geq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u dx \quad \blacksquare$$