第三章 线性抛物型方程的L^2理论

张祖锦 David Zhang

To mommy, daddy, and sister

3.1.设Ω是R^n中的有界区域,$a_{ij}\in L^\infty(\Omega),c\in L^\infty(\Omega)$,且存在正常数$\mu$使成立:

$$a_{ij}\xi_i\xi_j\geq\mu|\xi|^2,\forall\xi\in R^n,\forall x\in\Omega$$

这里a_{ij}和c都是实值函数(下同).考虑特征值问题:

$$(D1)\begin{cases}-D_j\left(a_{ij}D_iu\right)+cu=\lambda u,x\in\Omega;\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

我们称是此问题有非平凡解$u\in H_0^1(\Omega)$的复数λ为特征值,并称相应的非平凡解$u\in H_0^1(\Omega)$为特征函数.证明下列结论:

(i)上述问题的所有特征值都是实数,且对应于不同特征值的特征函数按$L^2(\Omega)$内积互相正交.

证明 (a)上述问题的所有特征值都是实数.

设λ是问题$(D1)$的特征值,则

$$\exists 0\neq u\in H_0^1(\Omega),s.t.\int_\Omega a_{ij}D_iuD_judx+\int_\Omega cuvdx=\lambda\int_\Omega uvdx,\forall v\in H_0^1(\Omega)$$

特别取$v=u\in H_0^1(\Omega)$有$\int_\Omega a_{ij}D_iuD_judx+\int_\Omega cu^2dx=\lambda\int_\Omega u^2dx$,两边取共轭,比较后有$\lambda\int_\Omega u^2dx=\lambda^-\int_\Omega u^2dx$,从而$\lambda=\lambda^-,\lambda\in R^1$.

注 这里a_{ij},c均为实值的.

(b)对应于不同特征值的特征函数按$L^2(\Omega)$内积互相正交.

设$\lambda,\lambda'(\lambda\neq\lambda')$为问题$(D1)$的特征值,$u,u'$分别为$\lambda,\lambda'$对应的特征函数,则

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega uu'dx&=\int_\Omega a_{ij}D_iuD_ju'dx+\int_\Omega cuu'dx\\&=\int_\Omega a_{ij}D_iu'D_judx+\int_\Omega cu'udx=\lambda'\int_\Omega u'udx\end{aligned}$$

即$\int_\Omega uu'dx=0,u\perp u'\left(于L^2(\Omega)\right)$.

(ii)上述问题有无穷多个互不相交的特征值,它们构成一个趋于$+\infty$的数列.

证明 取常数$C>max\left\{ess\,sup_{\Omega;i,j}|a_{ij}|,ess\,sup_\Omega|c|\right\}$,由

$$\int_\Omega a_{ij}D_iuD_jvdx+\int_\Omega cuvdx=\lambda\int_\Omega uvdx,\forall v\in H_0^1(\Omega)$$

知

$$\int_\Omega a_{ij}D_iuD_jvdx+\int_\Omega(c+C)uvdx=(\lambda+C)\int_\Omega uvdx,\forall v\in H_0^1(\Omega)$$

定义$H_0^1(\Omega)$中的等价范数

$$||u||_\#=\int_\Omega a_{ij}D_iuD_judx+\int_\Omega(c+C)u^2dx$$

这是由于$a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$;$Poincare$不等式及其一致椭圆条件.其产生的内积为

$$(u,v)_{\#}=\int_{\Omega}a_{ij}D_i uD_j udx+\int_{\Omega}(c+C)uvdx$$

对于$u\in L^2(\Omega)$,映射$v\in H_0^1(\Omega)\to\int_{\Omega}uvdx\in R$是线性有界的,由$Riesz$表示定理,

$$\exists\,|\,w\in H_0^1(\Omega),s.t.\int_{\Omega}uvdx=(u,v)_{\#}$$

且w连续依赖于u,即$K:u\in L^2(\Omega)\to w\in H_0^1(\Omega)$是连续的,即

$$\exists C>0,s.t.\,||\,Ku\,||\leq C\,||\,u\,||,\forall u\in L^2(\Omega)$$

而由$Sobolev$嵌入定理,$i:H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$嵌入是紧的,从而

$$Ki:u\in H_0^1(\Omega)\to w\in H_0^1(\Omega)$$

是紧的.而弱解的定义可改为$(u,v)_{\#}=(\lambda+C)(Kiu,v)_2,\forall v\in H_0^1(\Omega)$,即

$$[I-(\lambda+C)Ki]u=0$$

由于Ki的对称紧性,$H_0^1(\Omega)$为无穷维的$Hilbert$空间,及$Hilbert-Schmidt$理论,其有可数多个实特征值,记为

$$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n,\cdots.$$

对$\forall u_k$,取其属于它的特征函数$0\neq u_k\in H_0^1(\Omega)$,有

$$\mu_k(u_k,u_k)_{\#}=(Kiu_k,u_k)=\int_{\Omega}u^2dx>0$$

即$\mu_k>0$,而也有$0\notin\sigma_p(Ki)$,不妨设

$$\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_n\geq\cdots>0$$

于是$\dfrac{1}{\lambda_k+C}=\mu_k,\lambda_k=\dfrac{1}{\mu_k}-C$.对于问题$(D1)$的特征值有

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n\leq\cdots<\infty\text{ 且 }\lambda_k\to\infty(k\to\infty)$$

(iii)存在$L^2(\Omega)$的正交规范基底(即完备的规范正交系)$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$,其中每个函数u_k都是上述特征值问题的特征函数.特别,每个$u_k\in H_0^1(\Omega)$.

证明 由于Ki的紧性,$dim\,Ker\left[I-(\lambda_k+C)Ki\right]\equiv n_k<\infty$,从而

$$\exists\left\{u_{k,i}\right\}_{i=1}^{n_k}\text{线性无关},s.t.Ker\left[I-(\lambda_k+C)Ki\right]=span\left\{u_{k,i}\right\}_{i=1}^{n_k}$$

再对其在$L^2(\Omega)$中$Gram-Schmidt$正交规范化,不妨仍设为$\left\{u_{k,i}\right\}_{i=1}^{n_k}$,再由$Hilbert-Schmidt$理论,有$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}=\left\{u_{k,j};j=1,2,\cdots,n_k;k=1,2,\cdots\right\}$构成$H_0^1(\Omega)$的基底,而由$L^2(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$及$(i)$有$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$为$L^2(\Omega)$的规范正交基底.

(iv)对应于每个特征值的特征子空间都是有限维的,每个特征值的几何重数(即特征子空间的维数)和代数重数(即广义特征子空间的维数)相等.

证明 由(iii),$\forall k\in Z_+,dim\,Ker\left[I-(\lambda_k+C)Ki\right]=n_k<\infty$,而$\left\{u_{k,i}\right\}_{i=1}^{n_k}$为其一组基.即$(\lambda_k+C)Ki\,|_{Ker\left[I-(\lambda_k+C)Ki\right]}$在$\left\{u_{k,i}\right\}_{i=1}^{n_k}$下的矩阵是对角的,由$Jordan$标准型理论,$\lambda_k$的几何重数和代数重数相等.

(v)特征函数列$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$也构成$H_0^1(\Omega)$的基底(即完全的线性无关组),并且存在$H_0^1(\Omega)$的内积$(\bullet,\bullet)_{\#}$,它所对应的范数与$H_0^1(\Omega)$的常规范数等价,使得$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$按此内积$(\bullet,\bullet)_{\#}$是正交基底.

证明 取(ii)中的内积$(\bullet,\bullet)_{\#}$,.由(iii),已有$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$构成$H_0^1(\Omega)$的基底,且$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$关于$(\bullet,\bullet)_{\#}$是正交的,因为由(ii)中的等式,有

$$(u_k,u_l)_{\#}=(\lambda_k+C)(Kiu_k,u_l)_2=(\lambda_k+C)\int_{\Omega}u_k u_l dx=0(k\neq l)$$

(vi)对任意$u\in L^2(\Omega)$成立下列$Fourier$展开:

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_k,\text{其中}a_k=\int_{\Omega}uu_k dx(k=1,2,\cdots)$$

这里的和式按$L^2(\Omega)$范数收敛到u.如果$u\in H_0^1(\Omega)$,那么该和式按$H_0^1(\Omega)$范数收敛到u.

证明 由(v),$(u_k,u_l)_{\#}=0(k\neq l)$而

$$(u_k,u_k)_{\#}=(\lambda_k+C)(Kiu_k,u_k)_2=(\lambda_k+C)\int_{\Omega}u_k^2 dx=\lambda_k+C$$

从而$\left\{\dfrac{u_k}{\sqrt{\lambda_k+C}}\right\}_{k=1}^{\infty}$是$H_0^1(\Omega)$中按范数$\|\bullet\|_{\#}$是正交规范基底.而有

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k+C}},b_k=\left(u,\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k+C}}\right)_{\#},k=1,2,\cdots$$

因$u\in L^2(\Omega)$及L^2中$Fourier$展开的唯一性,有

$$a_k=\frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k+C}},k=1,2,\cdots$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_k=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k+C}}=u(\text{于}H_0^1(\Omega))$$

(vii)如果$\partial\Omega\in C^{\infty}$,且$a_{ij},c\in C^{\infty}$,那么每个特征函数$u_k\in C^{\infty}$.

证明 由椭圆型方程的L^2理论中的解的高阶正则性及$Sobolev$嵌入定理有之.

$(viii)$令$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$为对应于$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$的特征值列.证明$H_0^1(\Omega)$有下列等价范数$\|\bullet\|_*$:

$$\|u\|_*=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(M+\lambda_k)a_k^2},a_k=\int_{gW}uu_k dx,k=1,2,\cdots$$

其中M是任意取定的满足条件$\lambda_k>-M(k=1,2,\cdots)$的正常数.特别,当$c\geq 0$时,可取$M=0$.

证明 由(vi)及$Parseval$等式,有

$$\| u \|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + C) a_k^2}$$

从而对$\forall M$满足$\lambda_k > -M, k = 1,2,\cdots$存在$C_1, C_2 > 0$,使得

$$C_1 \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (M + \lambda_k) a_k^2} \le \| u \|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2 \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (M + \lambda_k) a_k^2}$$

即两范数等价.

至此第一题完全证明.

3.2.设Ω是R^n中的有界区域,$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), c \in L^\infty(\Omega), \varphi \in L^2(\Omega)$,且存在正常数$\mu$使成立

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \mu |\xi|^2, \forall \xi \in R^n, \forall x \in \Omega$$

考虑初边值问题

$$(D2)\begin{cases} u_t = D_j(a_{ij}D_i u) - cu, & x \in \Omega, t > 0; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0(\text{边}); \\ u = \varphi, & x \in \Omega, t = 0(\text{初}). \end{cases}$$

应用题3.1.的结论给出这个初边值问题的弱解.并证明:

$(i)\, u \in ([0,\infty), L^2(\Omega))$,且当$\varphi \in H_0^1(\Omega)$时,$u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega))$.

(ii) 如果$c \ge 0$,那么当$\varphi \in L^2(\Omega)$时$L^2(\Omega)$范数意义成立$\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$,而当$\varphi \in H_0^1(\Omega)$时按$H^1(\Omega)$范数意义成立$\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

注 本题需应用下述无穷级数的$Lebesgue$控制收敛定理:

设$\{u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$是定义在$(t_0 - \delta, t_0)(\delta > 0)$上的一列函数,并且对$\forall k \in Z_+$,极限

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u_k(t) = a_k$$

存在.又设存在收敛的正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$使

$$\forall k \in Z_+, |u_k(t)| \le M_k, \forall t \in (t_0 - \delta, t_0).$$

则有

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$