时间与距离的对偶

北京大学退休教授 武际可

在[1]中笔者曾经说过：

“在经典力学中有两个最重要的概念：动量和动能。而经典力学的核心内容是运动方程，如果令质点的质量为 m，速率为 v，所受的外力为 f，他可以表述为以下两种等价的方式：

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=f \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)}{\mathrm{d}s}=f \qquad (2)$$

其中 t 是时间 s 是路程。

(1)和(2)的等价性是显然的，因为

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}s}v=\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)}{\mathrm{d}s}=f。”$$

在这些式子中， $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。如果我们引进 $u=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$，我们可以建立一个时间与距离的对偶系列。具体说来，对（1)、(2）相对偶的两个式子是：

$$\frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}s}=h \qquad (1)*$$

$$\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}mu^2)}{\mathrm{d}t}=h \qquad (2)*$$

由于在 u 的定义和 v 的定义中，时间和距离是互相倒易的，所以当 u 愈大时，速率愈小。所以如果称 v 为速率，则我们可以称 u 为滞率、h 为滞力、mu 为滞量、$\frac{1}{2}mu^2$ 为滞能。

为了得到这些新的量与（1)、(2）中各量的关系，由于我们有

$$uv=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=1 \qquad (3)$$

把这个式子对 t 求微商得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(uv)=\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2+\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=0 \qquad (4)$$

上式两边乘以 m，就得到

$$\frac{\mathrm{d}mu}{\mathrm{d}s}(v)^2+u\frac{\mathrm{d}mv}{\mathrm{d}t}=0$$

即有 $$fu+hv^2=0$$

亦即 $$h=-u^3 f \qquad (5)$$

我们看到在（1)、(2）与（1）*、(2)*之间有一种对偶关系。即把 t 与 s 互换，并且把对应的量，h 与 f、u 与 v 互换，两组方程是一样的。

上面我们只是在一维空间内来讨论问题的。现在我们把这个问题对高维空间来讨论。我们知道，对于 n 个自由度的问题，系统的状态可以用广义位移

$$q_i(i=1,2,3,\cdots,n)$$

来表示。我们知道，作用量

$$I=\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t \qquad (6)$$

取驻值时对应于真实的运动，其中 $L=T—U$。亦即对于 I 在运动轨道上变分为零

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i\mathrm{d}t=0$$

于是，广义位移必须满足拉格朗日方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots,n) \qquad (7)$$

为系统的拉格朗日函数，T 动能，U 为势能。

为了引进（7）的对偶形式的方程，我们首先引进在 n 维空间的弧长 s 的概念，令

$$\mathrm{d}s/dt=f(s) \qquad (8)$$

式中 f（s）是一个大于零的函数，于是变量 t 和变量 s 之间的变换可以是单值的。不妨把 s 对 t 的导数记为 f（s）。

把（6）对新变量 s 来定义，即有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q},q)\ \mathrm{d}t = \int_{s_0}^{s_1} L(\dot{q},q)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} L(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},q)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \\
&= \int_{s_0}^{s_1} L(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}f(s),q)\frac{1}{f(s)}\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} L(q'f(s),q)\frac{1}{f(s)}\mathrm{d}s \qquad (9) \\
&= \int_{s_0}^{s_1} M(q',q,s)\ \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

其中 $M(q',\ q,\ s) = L(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}f(s)\ ,\ q)\frac{1}{f(s)}$ （10）

q 上的撇号（ q' ）表示对 s 的导数。

令 I 的变分为零，利用同样的推导我们可以得到对 s 变量的一组方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{\partial M}{\partial q_i'}) - \frac{\partial M}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3,\cdots,n) \qquad (11)$$

方程组（11）是和（7）对偶的一组方程。一个是对时间一个是对距离。

应当指出的是正值函数 $f(s)$ 是可以任意取的，当 $f(s)$ 取恒为 1 时，得到的方程就是（7）。在适当的初条件 q_i^0 下我们求解（11）就可以得到过 q_i^0 的在 n 维空间中的解曲线 $q_i(s)$，也称为界轨道。$f(s)$ 的不同选取只是表明弧长的度量单位选取不同而已。解得了轨道 $q_i(s)$，并不就是最后的解。还需要确定点沿轨道运动的实际速率。

为此，考虑系统的能量守恒积分，对于系统的动能 T 和势能 U 有

$$T+U=\mathrm{const} \qquad (12)$$

其中动能 T 是 $\dot{q}_i(t)$ 的正定二次型

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

由（12）和（8），我们有

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = const - U$$

式中的 U 只是 $q_i(s)$ 的函数，既然 $q_i(s)$ 作为 s 的函数已经求得，所以 U 也就是 s 的函数。

现在我们定义在 n 维空间中的弧长 s 为

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j \qquad (13)$$

因为动能的二次型都是正定二次型，满足我们对弧长所要求的条件。这也就是把动力系统看作黎曼空间所采用的度量二次型，于是有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j}=\sqrt{const-U} \qquad (14)$$

这个式子作为一阶微分方程，积分后可以得到 s 与 t 的关系，最后就可以通过这个关系得到 $q_i(t)$。

以上的事实说明：时间和距离实质上是相同的，它们之间可以单值地相互变换，所以它们只是在尺度上有差别。也正因为如此，动力学的方程把时间和距离相互变换后，才能够保持形式不变。这篇短文只是讨论了几个动力学的基本方程在时间和距离互换后的结果，由此可以看出，在一切动力系统的方程中做这样的互换，都是可以的。

参考文献

[1]武际可，经典力学发展的两条路径，在第九届现代数学和力学学术会议（MMM-IX）2004 年 10 月 4－7 日，（ 上海）宣读
http://www.sciencenet.cn/m/user_content.aspx?id=215538