不确定性的灰色系统描述

灰色现象是当我们只知道系统的有关部分信息时，不能准确给定系统的状态属性值的现象。

对灰色现象的系统理论研究由我国华中科技大学教授（原华中工学院)邓聚龙先生于1982年所开创。根据邓先生的定义，(当对于研究主体而言)，一个系统的部分信息已知部分信息未知时，该系统就称为一个灰色系统。灰色系统是界于白色系统和黑色系统之间的一类系统。虽然，不少灰色系统方法遭到了人们的严厉批评[1,2]，但是，灰色现象作为一种客观存在仍然值得研究。

1 灰色系统概念的定性描述

一切研究以系统为对象，系统是有层次的，系统的最基本的不再划分的组成成分叫做系统的**基元**，通俗叫要素。全系统的部分基元组成的一个研究对象叫做全系统的一个**子系统**。

系统的属性是多种多样的，如果能确定系统某个属性的准确值，那么，对系统的这个属性的了解就是白色的；如果对系统的某个属性的值完全不了解任何信息，那么，对系统的这个属性的了解就是黑色的；如果，对系统的这个属性的值的范围有一定程度的了解，那么，对系统的这个属性的了解就是灰色的。

包含有系统某一或某些属性信息的载体称**信息元**。如，一个数学方程就是关于某个或某类系统某种信息的一个信息元；一个声波振动或声音反映某个系统的某些属性信息，是一个信息元；一块化石反映着远古时期某种生物的某些属性特征，故它是一个信息元；一幅图画一个符号也是某种信息元。

某系统的一个信息元I_k，若对确定相应的系统属性值是充分的，则称为**白色信息元**，或**完全信息元**；若I_k对确定相应的系统属性值完全没有作用，则称该信息元是**黑色信息元**或**零信息元**，若把相应的系统属性值确定在某种范围内，则该信息元称为是**灰信息元**。

对于一个对象系统，若存在至少一个具有灰信息元的基元，那么就称该系统对认识主体是**灰色的**，简称**灰系统**。系统、子系统、基元都可能是灰系统。

对于一个灰对象系统，至少有一个子系统是灰的，或至少有一个基元是灰的。描述灰系统的基础是建立对灰属性的描述。灰基元至少有一个属性是灰色的。

根据上述对灰概念的认识，可以发现，灰色不确定性可以将三种基本不确定性都包含在内，是对一般不确定性的描述。近似不确定性相对于测量仪器的精度是一种轻度不确定性，其不确定范围一般在半个精度单位之内。如，用通常的直尺测量2000年制壹角硬币的直径是1.85cm，直尺的精度是1mm，那么，测量值的真值一般应在1.825-1.875cm之间，测量误差为0.5mm。显然这种不确定性可以归为灰色不确定性。

模糊不确定性是由概念外延边界的不确定性产生的，当概念外边界不确定性在理论上不

---

[1]朱宝璋. 关于灰色系统基本方法的研究和评论. 系统工程理论与实践， 1994，(4): 52-60.
[2]方乐润. 关于灰色系统理论的若干问题. 黑龙江水专学报，1994，(1): 8-14.

能消除时，模糊不确定性就不可避免。这里似乎不存在信息不完全的问题，但是，对于决策者来讲，由于不能显然地决定一个评价对象的类型归属，就意味着他对把对象放在哪一类更符合其价值需求存在信息不足的问题，这种信息不足在大多数情况下不值得花费成本进一步搞清楚，所以，也是一种灰色不确定性。

随机不确定性不是对属性值的边界给定一个双值估计，而是考察属性值的可能性分布，是从一个特殊角度对不确定性特征的研究。如果存在一个确定的可能性分布对应关系，这种不确定性就是一种随机不确定性。显然，在近似不确定性和模糊不确定性的描述中都可以出现随机不确定性，如许多人用同一仪器对同一系统属性的测量值可能表现出一定的随机分布律，隶属函数的确定中可能有随机因素，等等。

2 灰色系统的定量描述

根据对灰色系统的概念分析，对灰属性的描述是灰系统特征描述的基础。

灰色不确定性作为对不确定性现象的最一般描述，它既没有精确度的概念，也没有隶属度的概念，更没有可能性分布的概念。它对不确定性的描述是最粗糙的，即只能给出一个取值范围，从而用一个区间来描述。对于用多维变量定义的系统属性，则是一个空间区域。因此，邓聚龙教授选择用区间来表示一个灰数的取值，是找准了灰色不确定性的本义。

1.灰数的定义与分类[3]

定义 1 对于一个系统的属性 A，若确定了它在某时空点(一个场景)的取值在区间 a 内，则称 a 为 A 的一个**灰值**，记作 $\otimes_A = a$，而称 A 在此场景的取值为**灰数**。

根据区间的类型不同，灰值和灰数也有以下类型：

(1) **全黑灰值**：$a = (-\infty, +\infty)$

这表示对 A 的取值完全不了解，没有关于其大小的任何信息。在概率论中，虽然正态分布变量的取值范围也是 $(-\infty, +\infty)$，但对 A 在每一个实数上的可能性大小有非常确切的了解，因而是有信息的。如果只能得到一个灰数的一个全黑灰值，则称之为**黑数**。

(2) **半黑灰值**：$a = (q, +\infty)$ 或 $a = (-\infty, p)$

这表示可以得到 A 的一个下限值或一个上限值，这一点，在实际中经常遇到，如“至多”、“至少”二词就是表示这一概念的。若只可以得到一个灰数的半黑灰值，则称它为**半黑灰数**。

(3)**标准灰值**：$a = [\alpha, \beta]$

这表示 A 的取值在 α 和 β 之间 $(\alpha < \beta)$，这是最普通的情况。若一个灰数的取值能确定在一个有限的区间之内，则称之为**标准灰数**。

a 也可以是开区间或半开区间。

---

[3] 邓聚龙教授给出了一套灰系统概念(邓聚龙. 灰色控制系统. 武汉：华中工学院出版社，第 3-26 页)，但给人的感觉过于数学化、形式化和复杂化，其实，灰系统在运算操作上只是一种处理方法，并无特别的实质规律。

2.灰数的基本性质——可改进性

灰数既然是由于信息缺乏造成的，那么，随着信息的补充，灰数的灰度就会减弱，即灰不确定性是可以改进的，这在定量上表现为其灰值区间的缩小。设 a_1 是 A 初始时的一个灰值，那么，当获取补充信息以后，对 A 取值的一个新估计 a_2 比 a_1 就小，即 $a_2 \subset a_1$。当然，如果发生错误信息，情况就难以说清，有可能 $a_2 \subset a_1$，还有可能 $a_1 \subset a_2$ ，或者 a_1 与 a_2 有交叉但无包含。在我们的分析中，不考虑错误信息的情况。

3.灰数的四则运算

灰数的运算实际是指其灰值的运算。设 $[\alpha_1,\alpha_2]_A$ 是 A 的灰值，$[\beta_1,\beta_2]_B$ 是 B 的灰值。

(1)灰数的加法

$$\otimes_{\mathrm{A}} + \otimes_B = [\alpha_1,\alpha_2]_A + [\beta_1,\beta_2]_B = [\alpha_1+\beta_1,\quad \alpha_2+\beta_2]$$

(2)灰数的减法

$$\otimes_{\mathrm{A}} - \otimes_B = [\alpha_1,\alpha_2]_A - [\beta_1,\beta_2]_B = [\alpha_1-\beta_2,\quad \alpha_2-\beta_1]$$

(3) 灰数的乘法

$$\begin{aligned}\otimes_{\mathrm{A}} \times \otimes_B &= [\alpha_1,\alpha_2]\times[\beta_1,\beta_2] \\ &= [\min(\alpha_1\beta_1,\alpha_1\beta_2,\alpha_2\beta_1,\alpha_2\beta_2),\quad \max(\alpha_1\beta_1,\alpha_1\beta_2,\alpha_2\beta_1,\alpha_2\beta_2)]\end{aligned}$$

(4) 灰数的除法

与普通的除法一样，零不能包含在除数的灰值中。

1)若 $0 \in [\beta_1\beta_2]$[4]，则

$$\begin{aligned}\otimes_{\mathrm{A}} \div \otimes_B &= [\alpha_1,\alpha_2]_A \div [\beta_1,\beta_2]_B \\ &= [\min(\tfrac{\alpha_1}{\beta_1},\tfrac{\alpha_1}{\beta_2},\tfrac{\alpha_2}{\beta_1},\tfrac{\alpha_2}{\beta_1}),\max(\tfrac{\alpha_1}{\beta_1},\tfrac{\alpha_1}{\beta_2},\tfrac{\alpha_2}{\beta_1},\tfrac{\alpha_2}{\beta_1})]\end{aligned}$$

2)若 $\otimes_B = (0,\beta]$ 或 $\otimes_B = [\beta,0)$，则有下表之规则：

	$(0,\beta]$	$[\beta,0)$
$\alpha_1 \ge 0$	$[\frac{\alpha_1}{\beta},+\infty)$	$(-\infty,\frac{\alpha_1}{\beta}]$
$\alpha_2 \le 0$	$(-\infty,\frac{\alpha_2}{\beta}]$	$[\frac{\alpha_2}{\beta},+\infty)$

(5)灰数的乘法和除法的分配律

[4] 这个条件的思想是：除数的灰值是个闭区间，且零不在其中，避免了零作除数。在数学上，零不能作为除数是因为任何数与零之积都是零，零作除数破坏了乘法运算的可逆性。在灰数除法中，零作除数使得计算结果不确定。

$$\{[\alpha_1,\alpha_2]+[\alpha_3,\alpha_4]\times[\beta_1,\beta_2]+[\beta_3,\beta_4]\}$$
$$=[\alpha_1,\alpha_2]\times[\beta_1,\beta_2]+[\alpha_1,\alpha_2]\times[\beta_3,\beta_4]+[\alpha_3,\alpha_4]\times[\beta_1,\beta_2]+[\alpha_3,\alpha_4]\times[\beta_3,\beta_4]$$

$$\{[\alpha_1,\alpha_2]+[\alpha_3,\alpha_4]\div[\beta_1,\beta_2]+[\beta_3,\beta_4]\}$$
$$=[\alpha_1,\alpha_2]\div[\beta_1,\beta_2]+[\alpha_1,\alpha_2]\div[\beta_3,\beta_4]+[\alpha_3,\alpha_4]\div[\beta_1,\beta_2]+[\alpha_3,\alpha_4]\div[\beta_3,\beta_4]$$

(6)灰数的四则运算不可逆，即由$\otimes_A-\otimes_B=\otimes_C$推不出$\otimes_A+\otimes_C=\otimes_B$，由$\otimes_A\div\otimes_B=\otimes_C$推不出$\otimes_B\times\otimes_C=\otimes_A$，这是由不确定性本身造成的。对模糊数也是这样。

(7)对于两个不同的灰数A,B，即使其灰值区间相同，即为同一实数区间，它们的灰值仍不能称为是相等的，从而$\otimes_A-\otimes_B\neq 0$，$\otimes_A\div\otimes_B\neq 1$。所以，不能离开灰数论灰值。

表 1 灰数四则运算举例

$\otimes_A$	$\otimes_B$	和	差	积	商
[2,3]	[1,8]	[3,11]	[-6,2]	[2,24]	[2/8,3]
[-3,-2]	[1,8]	[-2,6]	[-11,-3]	[-24,-2]	[-3,-2/8]
[-3,0]	[1,8]	[-2,8]	[-11,-1]	[-24,0]	[-3,0]
[0,3]	[1,8]	[1,11]	[-8,2]	[0,24]	[0,3]
[-3,2]	[1,8]	[-2,10]	[-11,1]	[-24,16]	[-3,2]
[2,3]	[-8,-1]	[-6,2]	[3,11]	[-24,-2]	[-3,-2/8]
[-3,-2]	[-8,-1]	[-11,-3]	[-2,6]	[2,24]	[2/8,3]
[-3,0]	[-8,-1]	[-11,-1]	[-2,8]	[0,24]	[0,3]
[0,3]	[-8,-1]	[-8,-2]	[1,11]	[-24,0]	[-3,0]
[-3,2]	[-8,-1]	[-11,1]	[-2,10]	[-16,24]	[-2,3]
[2,3]	[-8,0]	[-6,3)	(2,11]	[-24,0)	[-3/8,+∞)
[-3,-2]	[-8,0]	[-11,-2)	(-3,6]	(0,24]	[2/8,+∞)
[-3,0]	[-8,0]	[-11,0)	(-3,8]	(0,24]	[0,+∞)
[0,3]	[-8,0]	[-8,3)	(0,11]	[-24,0)	[-3/8,+∞)
[-3,2]	[-8,0]	[-11,2)	(-3,10]	[-16,24]	(-∞,+∞)
[2,3]	(0,8]	(2,11]	[-6,3)	(0,24]	[2/8, +∞)
[-3,-2]	(0,8]	(-3,6]	[-11,-2)	[-24,0)	(-∞,-2/8]
[-3,0]	(0,8]	(-3,8]	[-11,0)	[-24,0)	(-∞,0]
[0,3]	(0,8]	(0,11]	[-8,3)	(0,24]	[0,+ ∞)
[-3,2]	(0,8]	(-3,10]	[-11,2)	[-24,16]	(-∞,+∞)
[2,3]	[-8,1]	[-6,4]	[1,11]	[-24,3]	(-∞,+∞)
[-3,-2]	[-8,1]	[-11,-1]	[-4,6]	[-3,24]	(-∞,+∞)
[-3,0]	[-8,1]	[-11,1]	[-4,8]	[-3,24]	(-∞,+∞)

[0,3]	[-8,1]	[-8,4]	[-1,11]	[-24,3]	(-∞,+∞)
[-3,2]	[-8,1]	[-11,3]	[5,1]	[-16,24]	(-∞,+∞)
[2, 3]	[2, 3]	[4, 6]	[-1, 1]	[4, 9]	[2/3, 3/2]

4.灰变量——动态灰系统

系统总是处于运动变化之中，因而系统的属性值处于变化之中。对一个属性，当我们考察它在时间中的动态特征时，称其为变量。若在一个变量的观测时间序列中存在至少一个灰值，就称该变量为灰变量，具有灰变量的系统也就是动态灰系统。

与灰数相比，灰变量是对系统属性的动态考察，灰数是对系统属性的静态考察。灰变量和灰数都是指属性，灰值是一次具体的观测值，是灰变量和灰数的具体化[5]。

有时要考察相同属性在不同系统中的不同取值，也可将此属性称为变量，当该变量有灰值时也称为灰变量。

[5] 灰值、灰数与灰变量的关系，可以类比于观测值、随机事件和随机变量的关系。