由最小作用量原理推导 Euler-Lagrange 方程

叶卢庆*

2014 年 12 月 10 日

本文的参考文献是朗道的《力学》. 设 $q(t)$ 是质点 Q 的广义坐标, 质点 Q 随着时间的改变而运动, 因此 $q(t)$ 是 t 的函数, 则 $q'(t)$ 是质点 Q 的广义速度. 最小作用量原理要求, 存在某个关于 Q 的位置 $q(t)$, 速度 $q'(t)$, 以及时间 t 的函数

$$L(q(t), q'(t), t),$$

使得在两个时刻 $t_1 < t_2$ 之间,

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q(t), q'(t), t)dt$$

取极小值. 对于任意其它的 Q 的运动

$$p(t) = q(t) + \alpha\delta(t),$$

其中 $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$. 且 α 是实变量. 则

$$\int_{t_1}^{t_2} L(p(t), p'(t), t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \alpha\delta(t), q'(t) + \alpha\delta'(t), t)dt$$

成为关于 α 的单变量函数, 且在 $\alpha = 0$ 时取得极小值, 于是,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \alpha\delta(t), q'(t) + \alpha\delta'(t), t)dt\Big|_{\alpha=0} = 0,$$

根据链法则, 也就是,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{x=q(t)}\delta(t) + \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\delta'(t)\right]dt = 0.$$

也即,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{x=q(t)}\delta(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\delta'(t)dt = 0. \tag{1}$$

根据分部积分公式,

$$\int \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\delta'(t)dt = \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\delta(t) - \int\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\right)\right)\delta(t)dt$$

结合 $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\delta'(t)dt = -\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\right)\right)\delta(t)dt$$

于是方程(1)变成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{x=q(t)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)}\right)\delta(t)dt = 0. \tag{2}$$

由于方程(2)对于任意的 $\delta(t)$ 都成立, 因此可得

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{x=q(t)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial y}\Big|_{y=q'(t)} = 0$$

恒成立. 这就是 Euler-Lagrange 方程.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

http://blog.sciencenet.cn/u/Yaloring