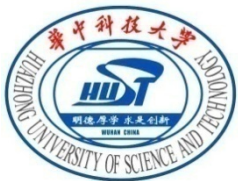


# 结 构 力 学

## Structural Analysis

华中科技大学土木工程与力学学院



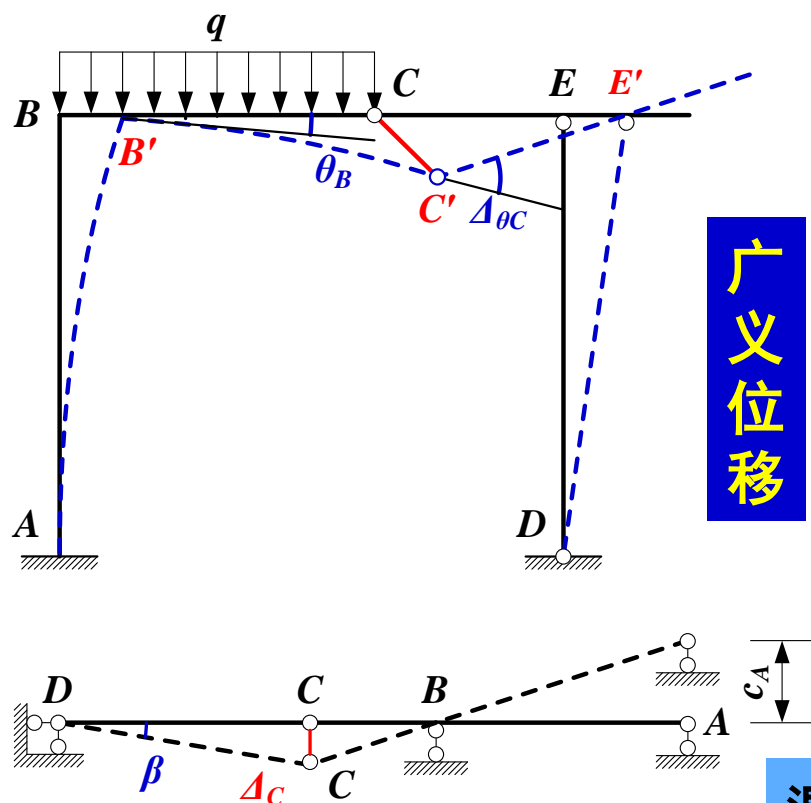
# 第5章 静定结构位移计算

# 主要内容

5.1	概述
5.2	刚体体系的虚功原理
5.3	变形体体系的虚功原理
5.4	结构位移计算的一般公式-单位荷载法
5.5	静定结构在荷载作用下的位移计算
5.6	结构位移计算的简化方法-图乘法
5.7	静定结构在非荷载作用下的位移计算
5.8	线弹性体系互等原理
5.9	典型例题解析

# 5.1 概述

**结构位移：**工程结构所用的材料是变形的，在荷载作用下结构会发生变形，而这种变形会引起结构上各点位置的变化，即结构位移。



广义位移

位移

线位移

水平位移

角位移

竖向位移

位移

绝对位移

相对位移

位移

刚体位移

变形位移

温度变化、支座移动、材料收缩和制造误差等非荷载因素也会使结构产生位移。

# 5.1 概述

## 位移计算的目的

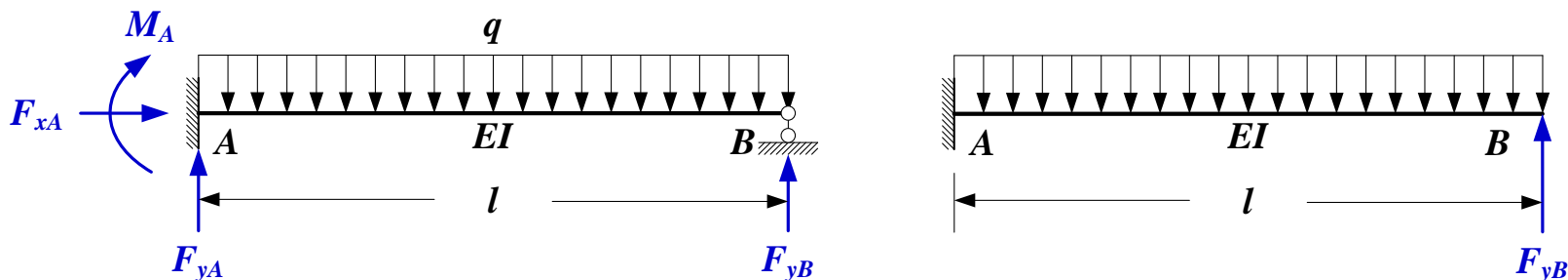
**1. 校核结构的刚度，即检验结构的变形是否符合使用的要求。**例如，对于受弯杆件和梁式结构（如梁式桁架），最大挠度与其跨度之比应小于规定的要求；对于各类高层建筑结构，在地震或风荷载作用下，层间位移与层高之比以及结构顶部位移与总高度之比均应小于规定的限值。

**2. 为了满足设计对结构外形的要求，需要预先计算并考虑结构的位移。**例如多跨钢桁架桥常采用悬臂拼装的方式施工，为确保桥段顺利合拢就位和桥面的顺直，需要对结构在施工过程中的位移进行计算，以便在施工工程中采用相应的措施。

# 5.1 概述

## 位移计算的目的

3. 为分析超静定结构以及结构的动力和稳定性计算打下基础。例如超静定结构的内力和支座反力无法由静力平衡条件唯一确定，其求解还必须同时考虑变形协调条件，这就需要计算结构的位移。



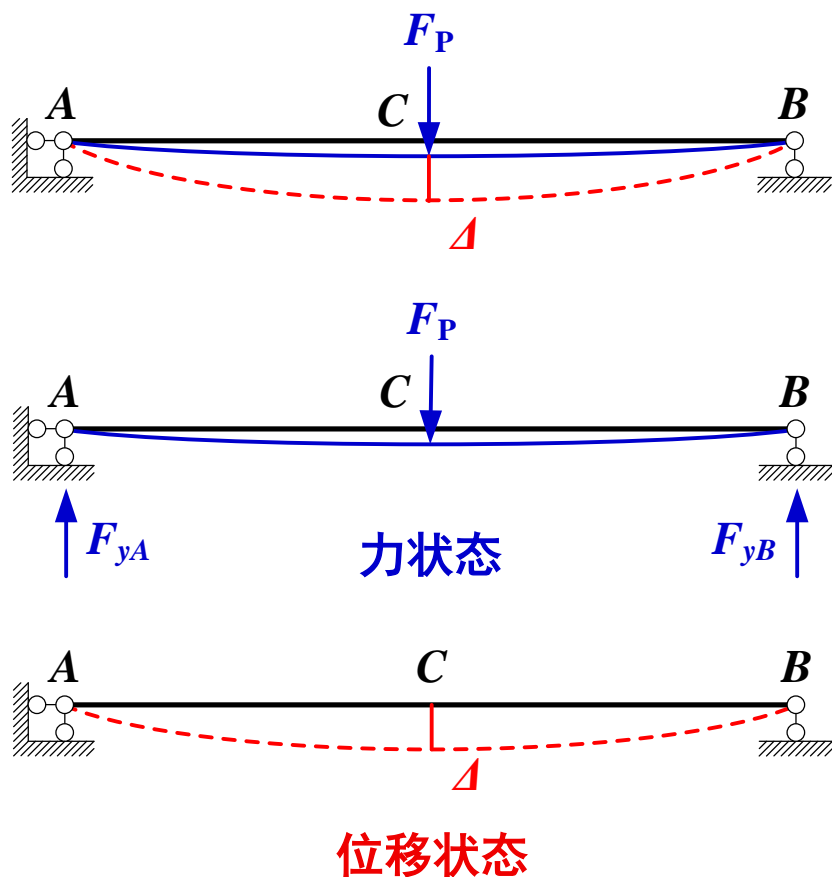
## 位移计算的方法

受弯杆件的变形曲线可以根据挠曲线微分方程和边界条件来确定。但结构分析中往往只需计算结构上个别点在指定方向的位移，这样需要采用更为简捷的计算方法。结构分析中计算位移的一般方法是以虚功原理为基础的。

# 5.2 刚体体系的虚功原理

## 虚功的概念

使力作功的位移不是由于该力本身所引起，即作功的力与相应于力的位移彼此独立，二者无因果关系，这时力所作的功为虚功。



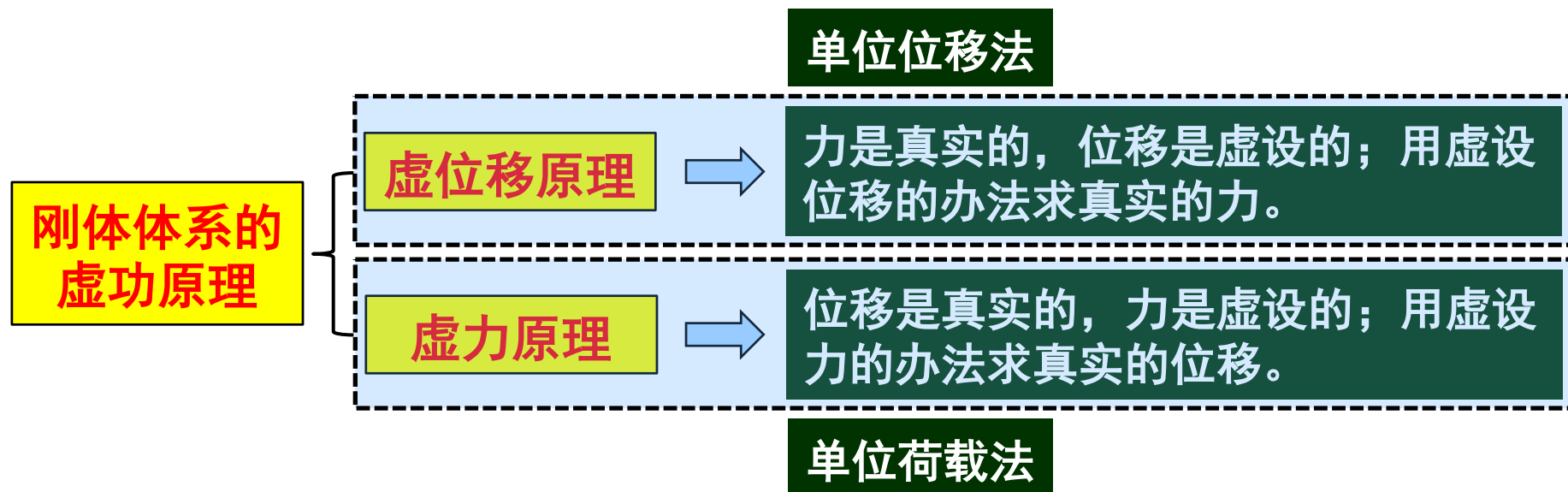
作功的力和相应的位移是彼此独立的两个因素，可将二者看成是分别属于同一体系的两种彼此无关的状态，其中力系所属的状态为**力状态**；位移所属状态为**位移状态**。 $F_P \cdot \Delta$ 表示力状态的外力在位移状态的相应位移上作的虚功。

虚功中作功的力不限于集中力，可以是力偶，也可以是一组包括支座反力在内的力系（即**广义力**）。

## 5.2 刚体体系的虚功原理

**刚体体系的虚功原理：**在具有理想约束的刚体体系上，如果**力状态**中的力系能够满足平衡条件，**位移状态**中的刚体位移能够与约束几何相容，则外力所作的虚功之和等于零，即 $\delta W_e = 0$ 。

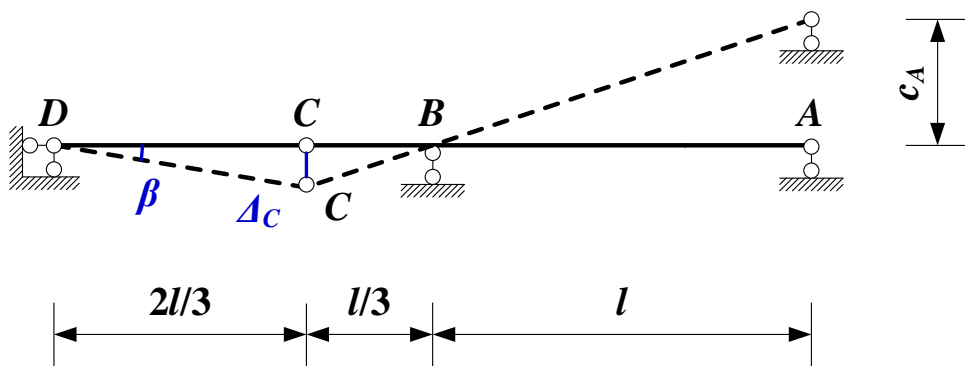
刚体体系的虚功原理中有两种彼此独立的状态（**力状态和位移状态**）。因此在应用刚体体系的虚功原理时，可根据不同的需要，将其中一个状态假定为虚设的，而另一个状态则是问题的实际状态。





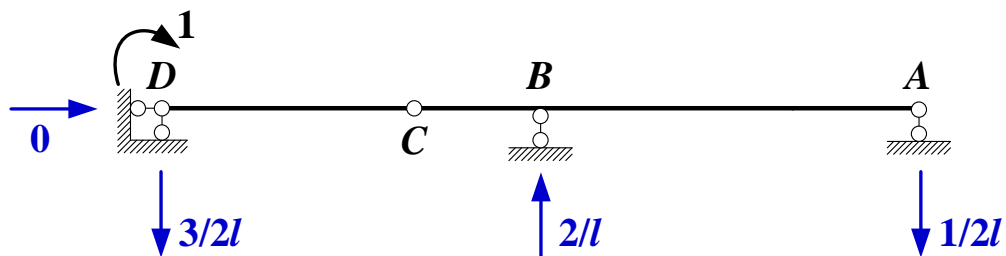
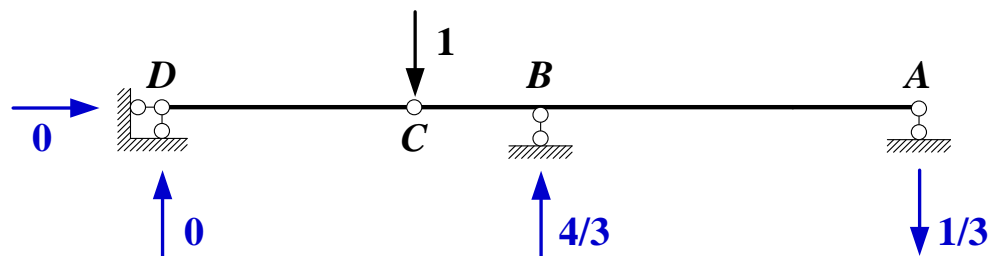
# 5.2 刚体体系的虚功原理

例：试用单位荷载法求C点竖向位移和CD杆转角



几何关系：

$$\Delta_C = \frac{1}{3}c_A \quad \beta = \frac{1}{2l}c_A$$

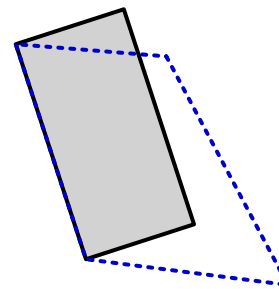
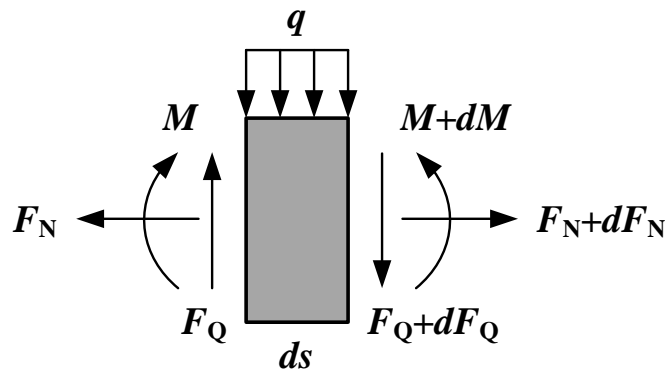
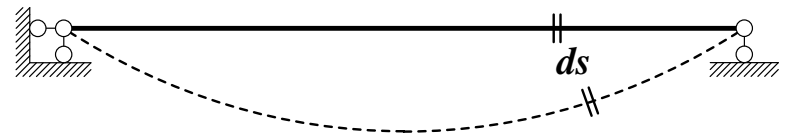
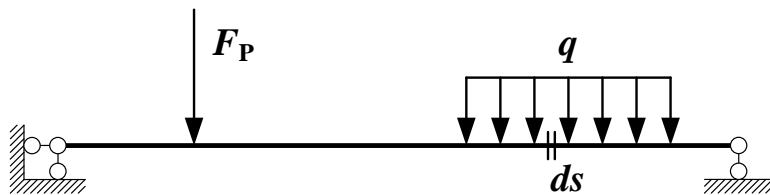


$$\delta W_e = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \beta - \frac{1}{2l} \cdot c_A = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2l}c_A$$

# 5.3 变形体体系的虚功原理

**变形体体系的虚功原理：**变形体体系处于平衡时，在任何无限小的连续虚位移下，外力所作的虚功之和等于变形体系所接收的虚变形功。以 $\delta W_e$ 表示外力虚功之和，以 $\delta W_i$ 表示整个变形体所接受的虚变形功，则有以下的虚功方程： $\delta W_e = \delta W_i$ 。



实线：刚体虚位移  
虚线：变形虚位移

## 5.3 变形体体系的虚功原理

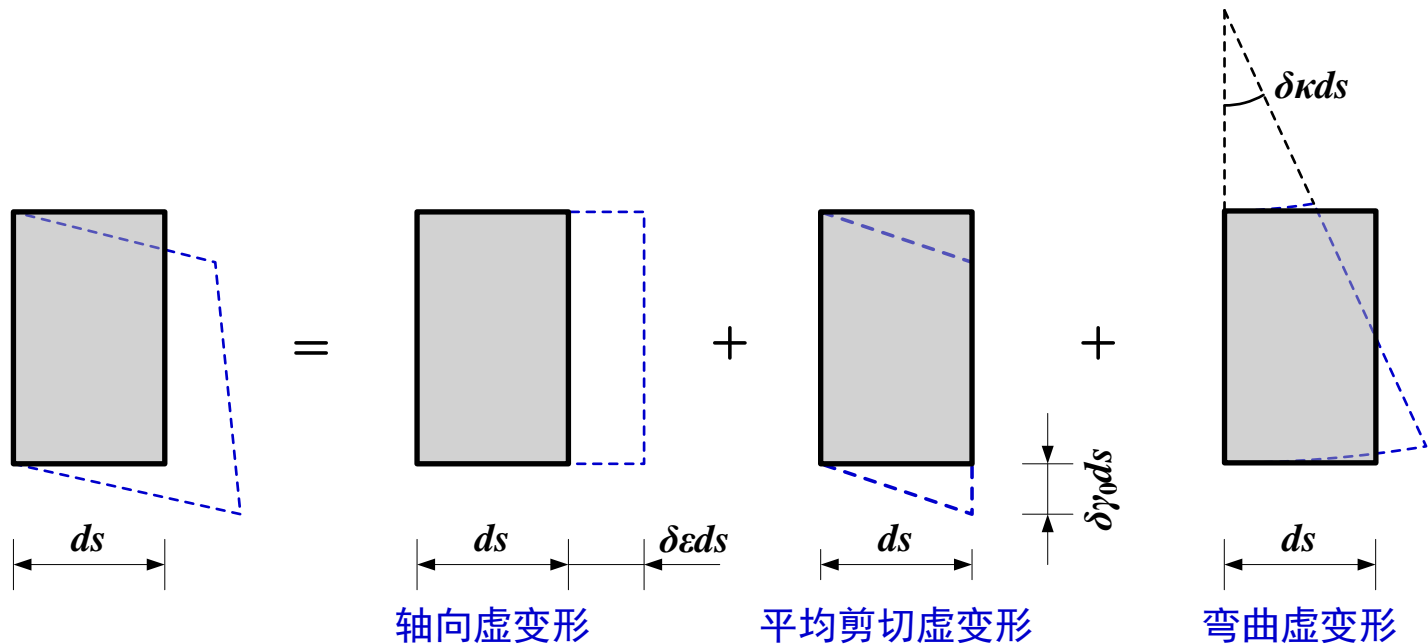
### 原理说明

第一种途径是将变形体的总虚功 $\delta W$ 视为外力所作虚功 $\delta W_e$ 与所有截面上内力所作虚功 $\delta W_{\text{内}}$ 之和，即： $\delta W = \delta W_e + \delta W_{\text{内}}$ 。由于每个截面两侧暴露出来的内力互为作用力和反作用力，在虚位移过程中它们总是大小相等，方向相反而且位移相同。因此它们所作的虚功相互抵消，有 $\delta W_{\text{内}} = 0$ 。于是整个结构上虚功变等于外力虚功，即： $\delta W = \delta W_e$ 。

第二种途径是将结构构件上各微段的虚位移分解为刚体虚位移和变形虚位移，而总虚功可视为作用于各微段上的所有力在刚体虚位移上所作虚功 $\delta W_{\text{刚}}$ 与变形虚位移上所作的虚功 $\delta W_i$ 之和，即： $\delta W = \delta W_{\text{刚}} + \delta W_i$ 。由于上述各微段均处于平衡状态，故由刚体系的虚功原理可知，所有力在刚体位移上所作的虚功之和等于零，即 $\delta W_{\text{刚}} = 0$ 。于是有： $\delta W = \delta W_i$ 。

# 5.3 变形体体系的虚功原理

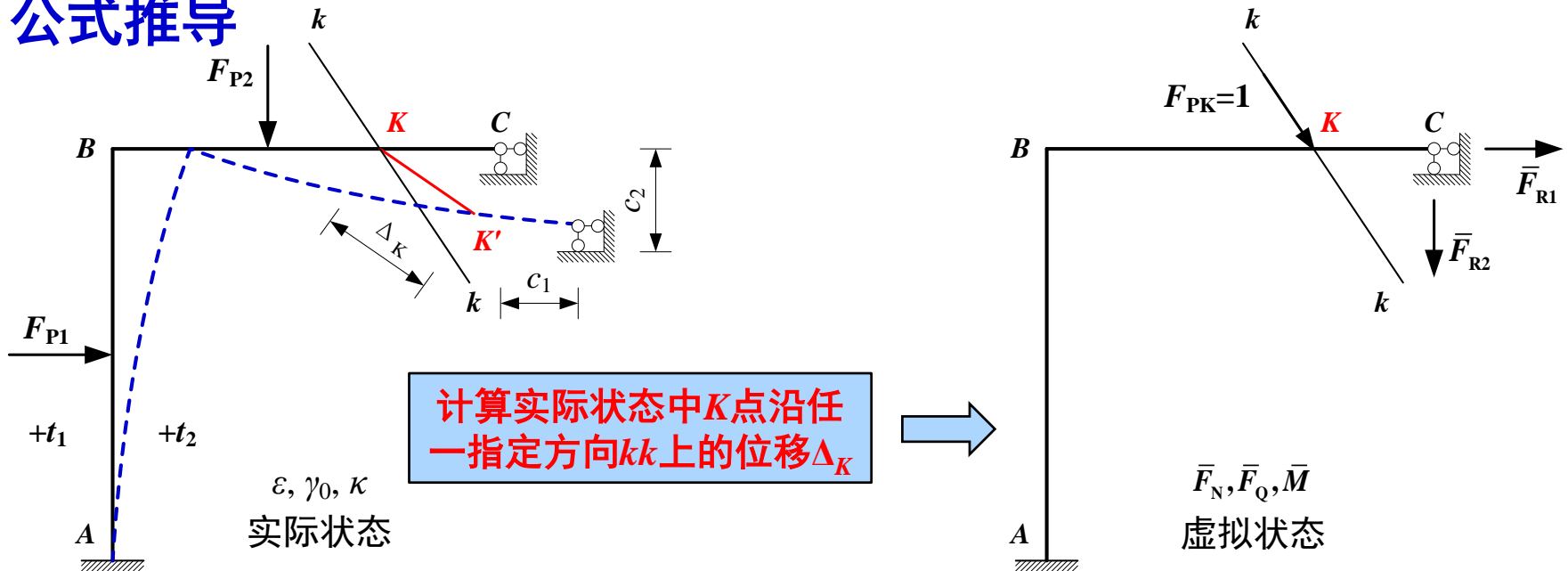
## 虚变形功的计算



- 微段变形虚位移上的虚变形功:  $d\delta W_i = F_N \delta\epsilon ds + F_Q \delta\gamma_0 ds + M \delta\kappa ds$
- 杆件的虚变形功通过沿杆长的积分求得, 整个结构体系所接受的总虚变形功应为各杆虚变形功之和:  $\delta W_i = \sum \int (F_N \delta\epsilon + F_Q \delta\gamma_0 + M \delta\kappa) ds$
- 变形体体系的虚功方程:  $\delta W_e = \sum \int (F_N \delta\epsilon + F_Q \delta\gamma_0 + M \delta\kappa) ds$

# 5.4 结构位移计算的一般公式-单位荷载法

## 公式推导



- 若将实际状态中结构的**真实位移**视作虚拟平衡状态的**虚位移**:

$$\delta W_e = 1 \cdot \Delta_K + \sum \bar{F}_R c \Rightarrow \Delta_K = \sum \int (\bar{F}_N \varepsilon + \bar{F}_Q \gamma_0 + \bar{M} \kappa) ds - \sum \bar{F}_R c$$

$1 \cdot \Delta_K$ : 单位荷载在实际变形状态位移上所作的虚功

$\sum \bar{F}_R c$ : 虚拟平衡状态的支座反力在实际状态各支座位移上所作的功

计算实际状态中K点沿任一指定方向 $kk$ 上的位移 $\Delta_K$

# 5.4 结构位移计算的一般公式-单位荷载法

## 公式讨论

$$\Delta_K = \sum \int (\bar{F}_N \varepsilon + \bar{F}_Q \gamma_0 + \bar{M} \kappa) ds - \sum \bar{F}_R c$$

1. 利用虚功原理求结构位移的实质是将结构的实际位移作为虚拟平衡状态的虚位移。但是结构的实际位移并不是无限小量，而是有限量。因此，将结构实际位移视作虚位移并不严格满足虚功原理的前提条件。只有当实际位移相对于结构的原有尺度来说很小，采用这一位移计算方法才不至于造成明显的误差；或者说，单位荷载法仅仅适用于小变形问题。当结构的实际变形属于大变形时，可以将荷载-变形路径分解成若干各小段，结合增量的方法求得结构位移的近似值。

2. 在使用单位荷载法建立虚拟平衡状态时，需注意单位荷载应是与所求单位位移（线位移、角位移或相对位移）相应的广义力，并使单位荷载仅在所求的广义位移上作功，而且使所作的功就等于所求位移本身。

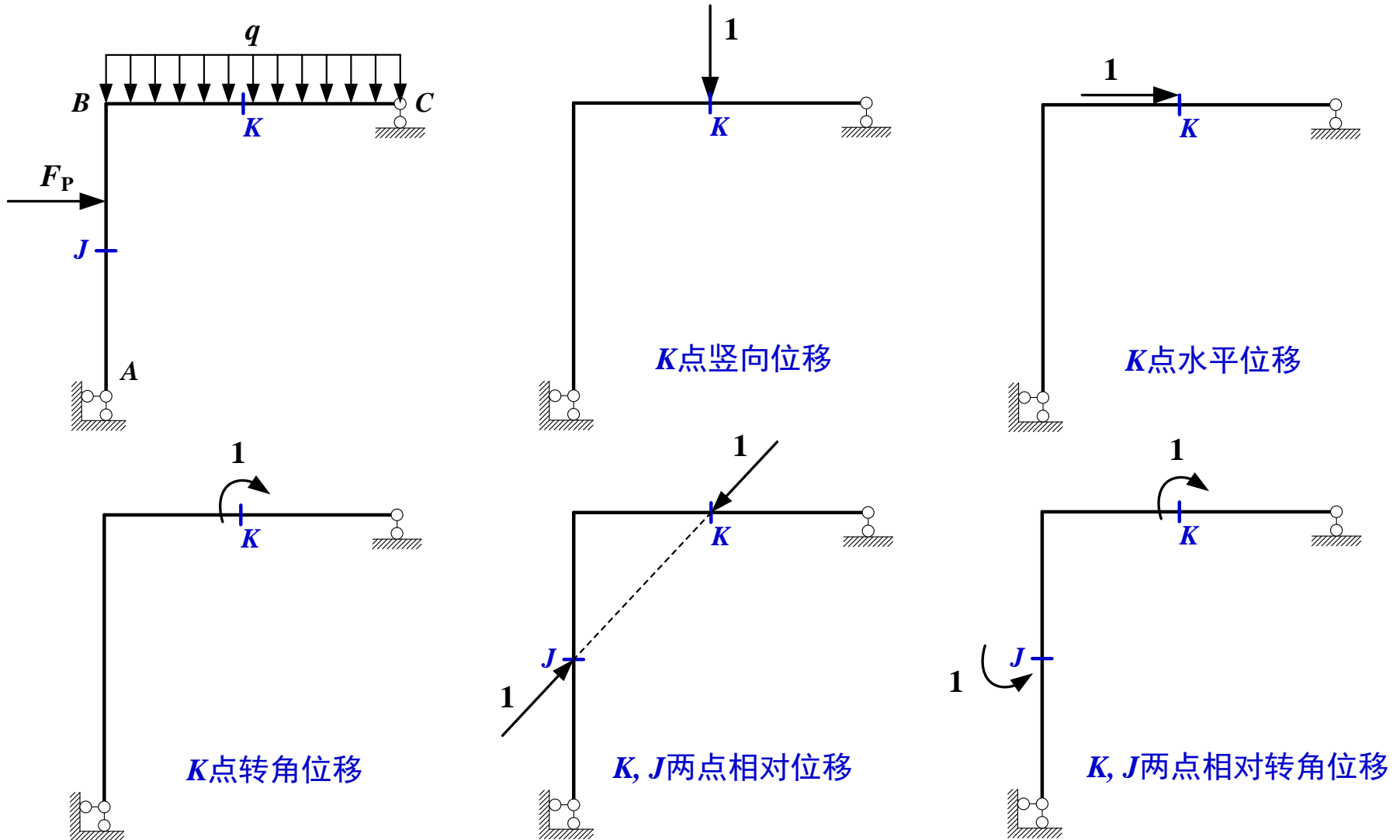
# 5.4 结构位移计算的一般公式-单位荷载法

## 广义位移和广义单位力常见示例

广义位移	相应的广义单位力
某点单个线位移 $\Delta$	该点沿 $\Delta$ 方向的单位集中力 $P = 1$
某截面单个角位移 $\theta$	该截面沿 $\theta$ 方向的单位力偶 $m = 1$
$AB$ 两点的相对线位移 $\Delta_{AB}$	沿 $AB$ 连线在 $A, B$ 两点分别作用相互反向的单位力 $P = 1$
$AB$ 梁截面的相对转角	在 $A, B$ 截面分别作用反向的单位力偶 $m = 1$
桁架结构或组合结构链杆 $AB$ 的转角	在 $AB$ 两端点沿 $AB$ 的正交方向设一对大小为 $1/l_{AB}$ 的反向集中力，组成单位力偶

# 5.4 结构位移计算的一般公式-单位荷载法

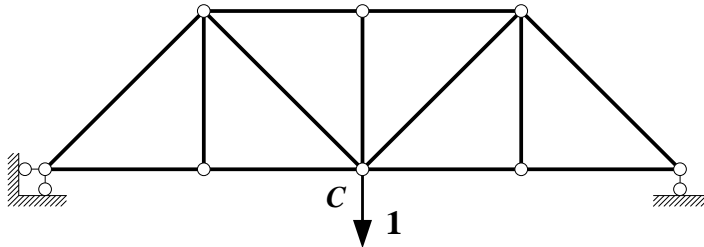
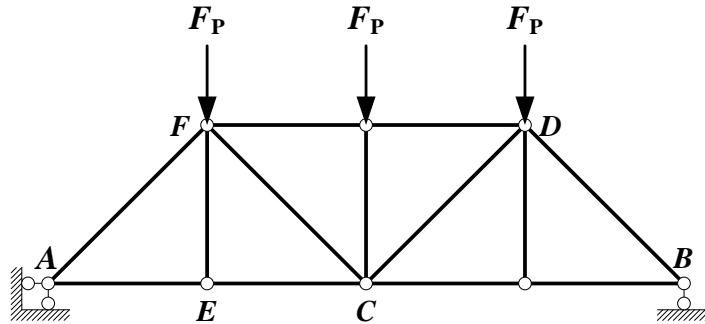
## 广义位移和广义单位力常见示例



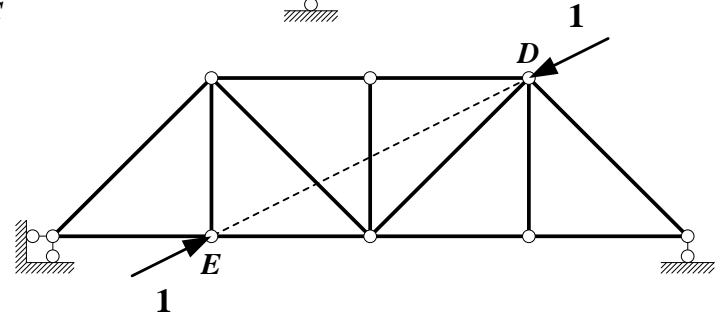


# 5.4 结构位移计算的一般公式-单位荷载法

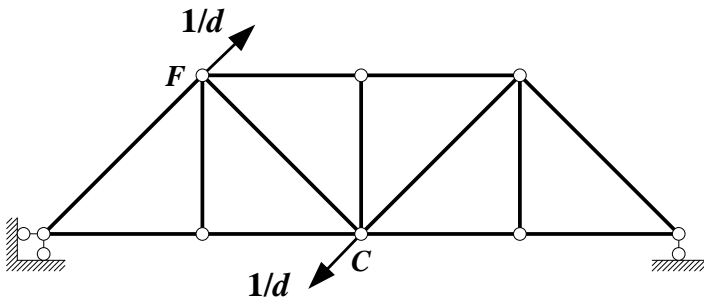
## 广义位移和广义单位力常见示例



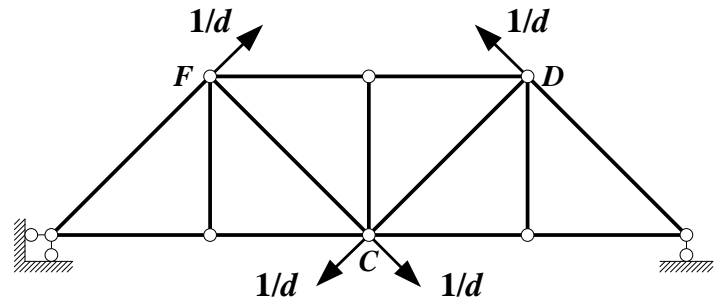
C点竖向位移



D, E两点相对位移



CF杆转角位移



CD, CF杆相对转角位移

# 5.5 静定结构在荷载作用下的位移计算

仅有荷载作用时位移计算的一般公式可简化为：

$$\Delta_K = \sum \int (\bar{F}_N \varepsilon + \bar{F}_Q \gamma_0 + \bar{M} \kappa) ds$$

虚拟状态

$$\bar{F}_N \quad \bar{F}_Q \quad \bar{M}$$

实际状态

$$\varepsilon \quad \gamma_0 \quad \kappa$$
$$F_{NP} \quad F_{QP} \quad M_P$$

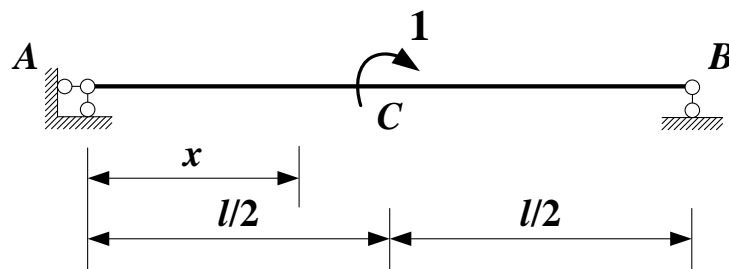
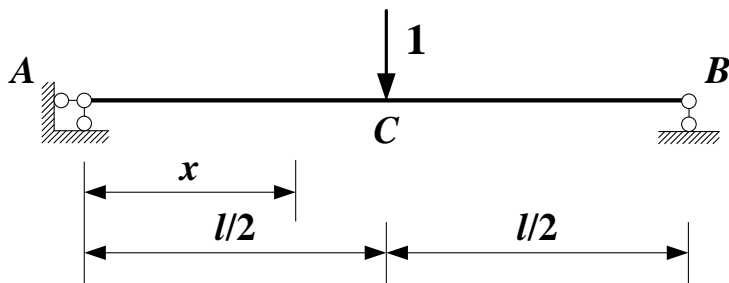
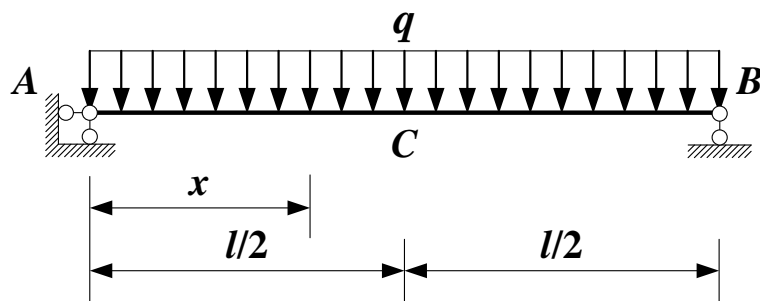
$$\varepsilon = \frac{F_{NP}}{EA} \quad \gamma_0 = k \frac{F_{QP}}{GA} \quad \kappa = \frac{M_P}{EI}$$

$$\Delta_K = \underbrace{\sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds}_{\text{①}} + \underbrace{\sum \int \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds}_{\text{②}} + \underbrace{\sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds}_{\text{③}}$$

结构类型	位移计算	结构类型	位移计算
梁和刚架	③	组合结构	①+③
桁架	①	拱	①+③ 或 ③

# 5.5 静定结构在荷载作用下的位移计算

例：试求图示简支梁中点C的竖向位移和转角，并比较剪切变形和弯曲变形对位移的影响。设梁的横截面为矩形，截面宽度为 **$b$** ，高度为 **$h$** ，材料的剪切模量 **$G=0.4E$** 。



• 由实际状态和虚拟状态下梁的内力可分别表示为：

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}: \quad M_P = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad Q_P = \frac{1}{2}ql - qx; \quad \bar{M} = \frac{1}{2}x \quad \bar{F}_Q = \frac{1}{2};$$

• 简支梁中点C的竖向位移（考虑对称性）为：

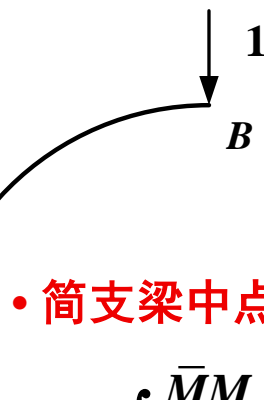
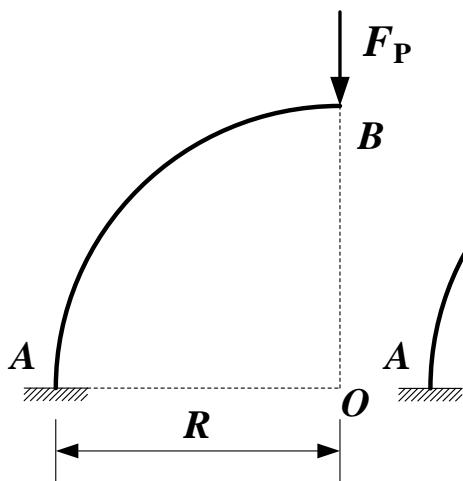
$$\Delta_{yC} = 2 \left[ \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}M_P}{EI} dx + \int_0^{l/2} k \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} dx \right]$$

$$\Delta_{yC} = \frac{5ql^4}{384EI} \left[ 1 + 2.4 \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{x}{2} \left( \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \right) dx + \frac{k}{GA} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}ql - qx \right) dx \right] = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{kql^2}{8GA} (\downarrow)$$

# 5.5 静定结构在荷载作用下的位移计算

例：试求图示半径为 $R$ 的圆弧曲杆 $B$ 端的竖向位移，已知曲杆的 $EI$ ， $EA$ 和 $GA$ 均为常数。设曲杆的横截面为矩形 $b \times h$ ,  $h/R=1/10$ , 材料的剪切模量 $G=0.4E$ 。

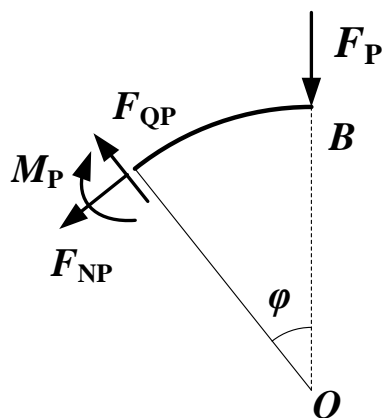


• 由实际状态和虚拟状态内力可分别表示为：

$$\begin{aligned} M_P &= -F_P R \sin \varphi & F_{NP} &= -F_P \sin \varphi & F_{QP} &= F_P \cos \varphi \\ \bar{M} &= -R \sin \varphi & \bar{F}_N &= -\sin \varphi & \bar{F}_Q &= \cos \varphi \end{aligned}$$

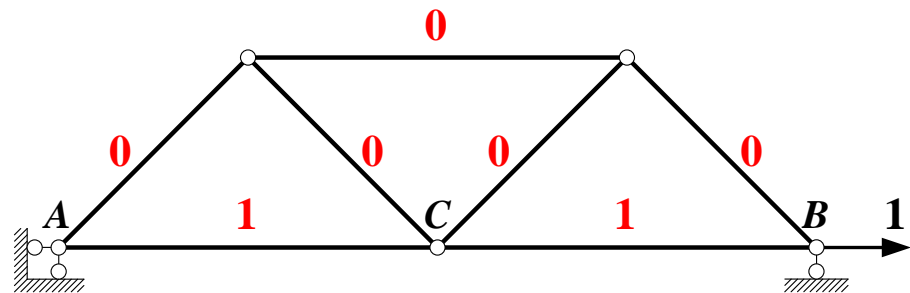
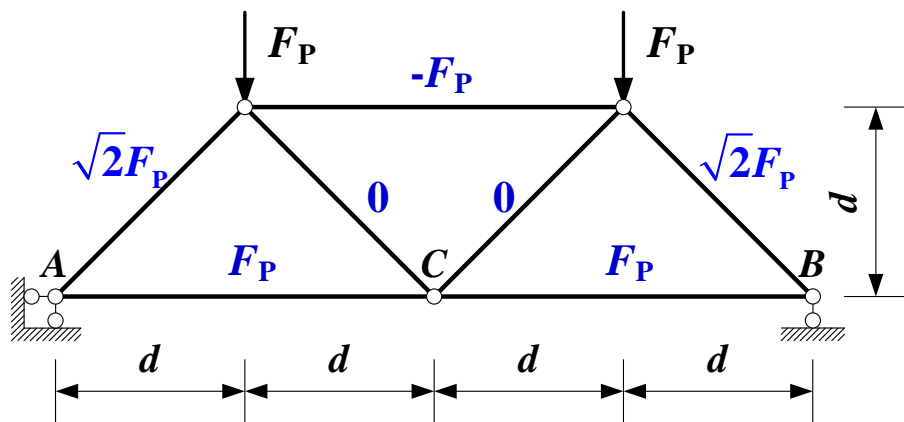
• 简支梁中点 $B$ 的竖向位移为：

$$\begin{aligned} \Delta_{yB} &= \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds + \int k \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds \\ &= \frac{F_P R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{F_P R}{EA} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{k F_P R}{GA} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi F_P R^3}{4EI} + \frac{\pi F_P R}{4EA} + \frac{k F_P R}{4GA} (\downarrow) \\ &= \frac{\pi F_P R^3}{4EI} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\pi F_P R^3}{4EI} \left( 1 + \frac{1}{400} + \frac{1}{1200} \right) \end{aligned}$$



# 5.5 静定结构在荷载作用下的位移计算

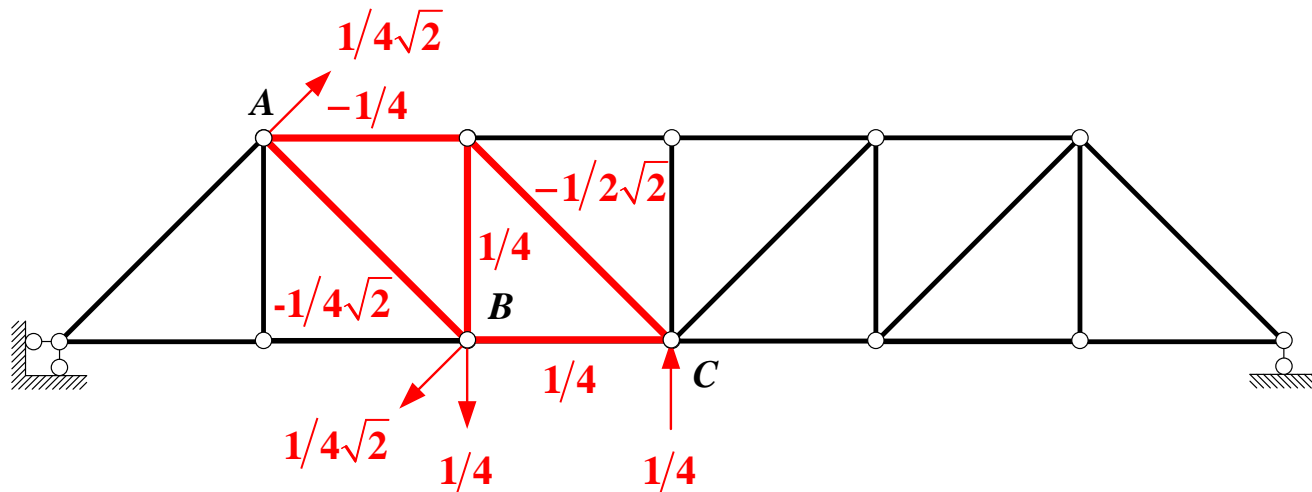
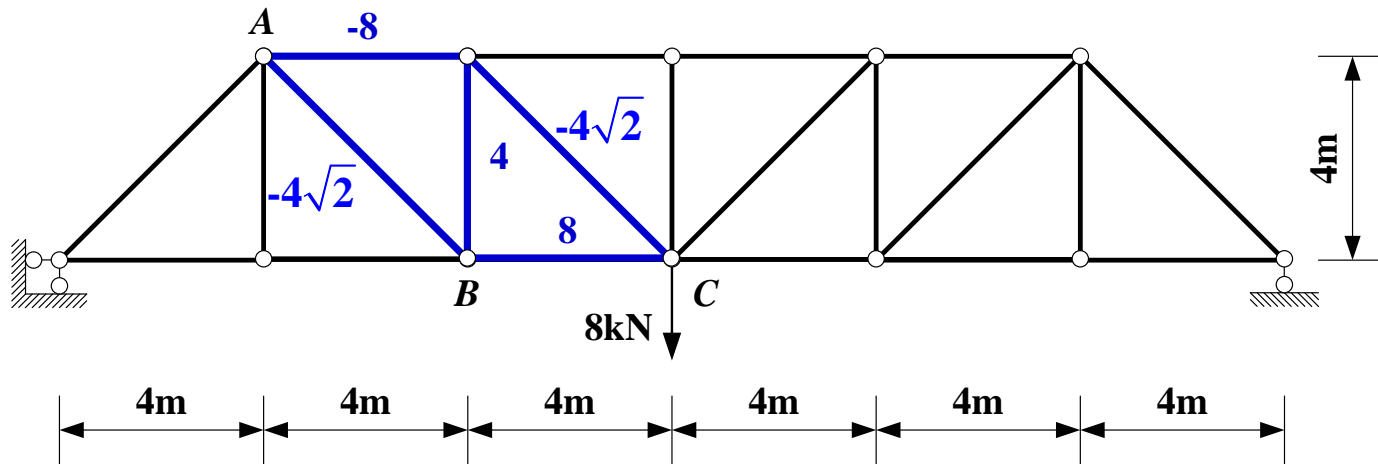
例：试计算图示桁架支座结点B的水平位移，设各杆的 $EA$ 相同。



$$\Delta_{xB} = \frac{1}{EA} \sum \bar{F}_N F_{NP} l = \frac{1}{EA} (2 \times 1 \times F_P \times 2d) = 4 \frac{F_P d}{EA} (\rightarrow)$$

# 5.5 静定结构在荷载作用下的位移计算

例：试计算图示桁架AB与BC两杆之间的相对转角，设各杆的 $EA$ 相同。

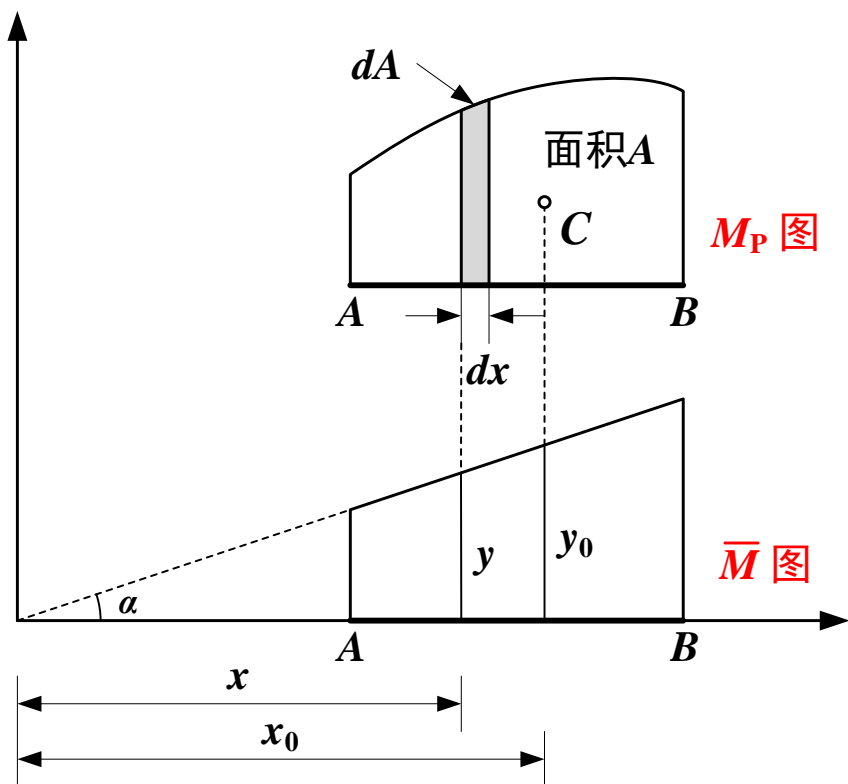


## 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

$\int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds$  的简化计算公式推导

$$\begin{aligned}\int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds &= \frac{1}{EI} \int \bar{M}M_P dx = \frac{1}{EI} \int x \tan \alpha M_P dx \\ &= \frac{1}{EI} \tan \alpha \int x dA = \frac{1}{EI} \tan \alpha A x_0\end{aligned}$$

$$\int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds = \frac{Ay_0}{EI}$$



计算杆件弯曲变形引起的位移时，可以用荷载弯矩图（ $M_P$ 图）的面积 $A$ 乘以其形心位置对应的单位弯矩图（ $\bar{M}$ 图）中的竖标 $y_0$ ，再除以杆件截面的抗弯刚度 $EI$ 。这种按照图形计算代替积分运算的位移计算方法就称为图形相乘法，简称图乘法。

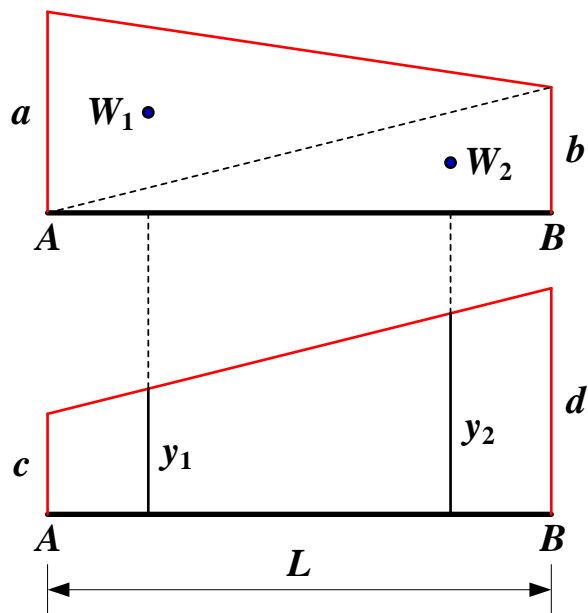
应用前提：等截面直杆端的情况，即 $EI$ 是常数；两个弯矩图中至少有一个是直线图形。

# 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

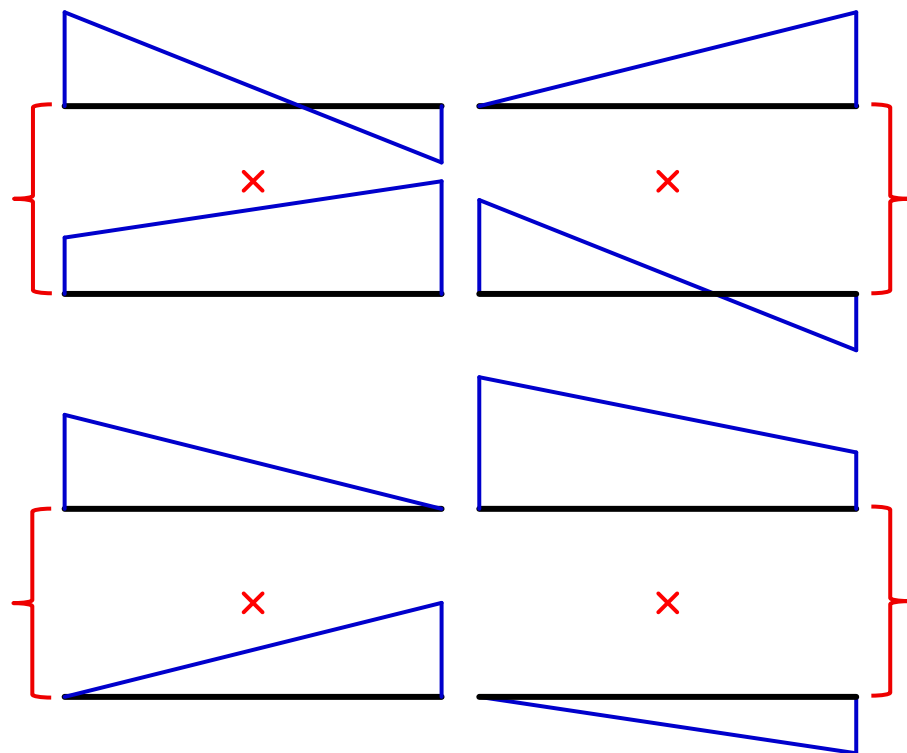
## 应用技巧

当弯矩图比较复杂，其面积或形心位置不易确定时，可以按照积分运算的规则，将其分解为几个简单的图形，分别与另一图形相乘，其代数和即为两图相乘的结果。

### • 两个直线图形的图乘公式



$$\frac{1}{EI} \int \bar{M} M_P ds = \frac{l}{6EI} (2ac + 2bd + ad + bc)$$



同侧相乘为正  
异侧相乘为负

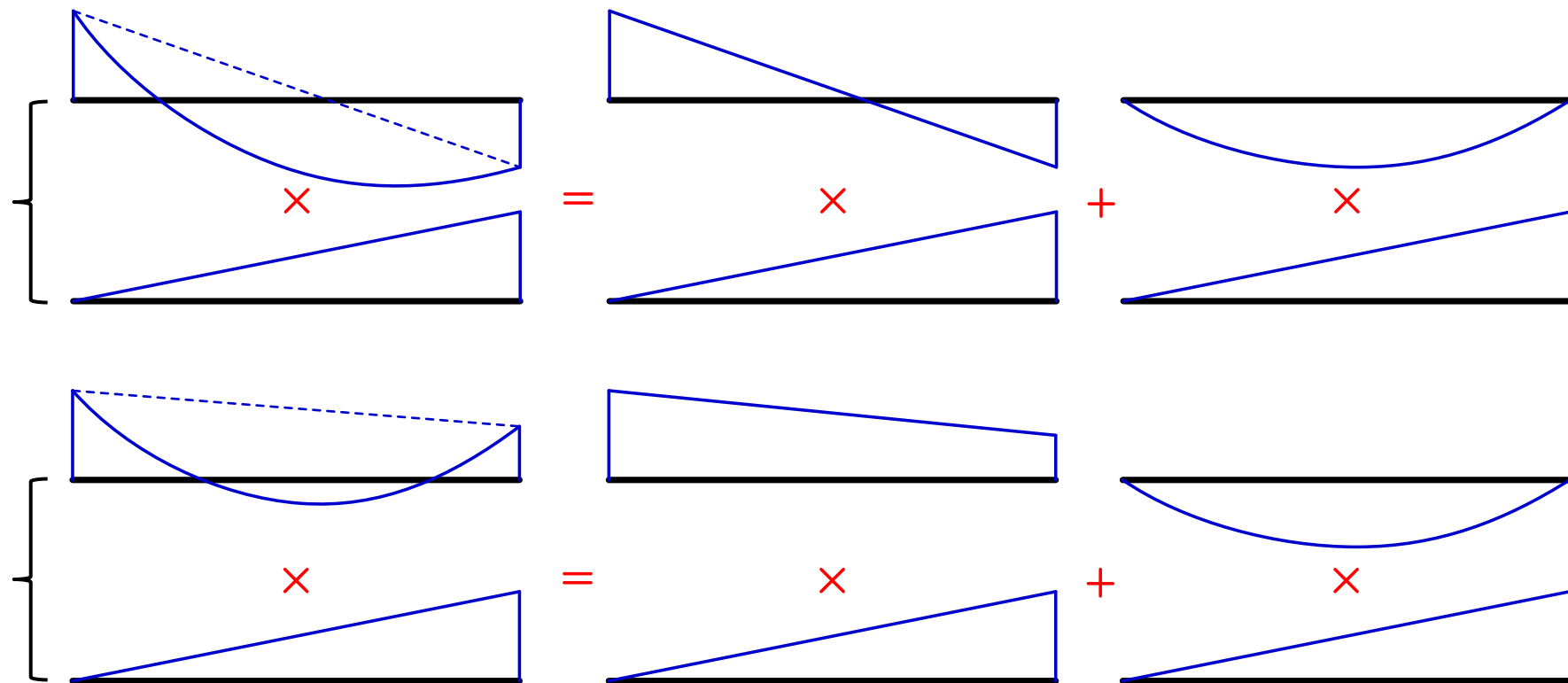


# 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

## 应用技巧

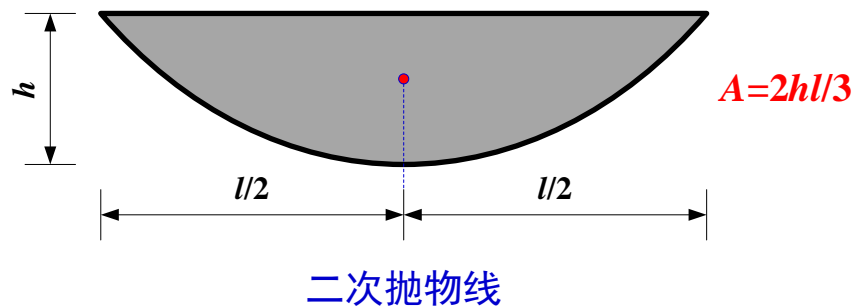
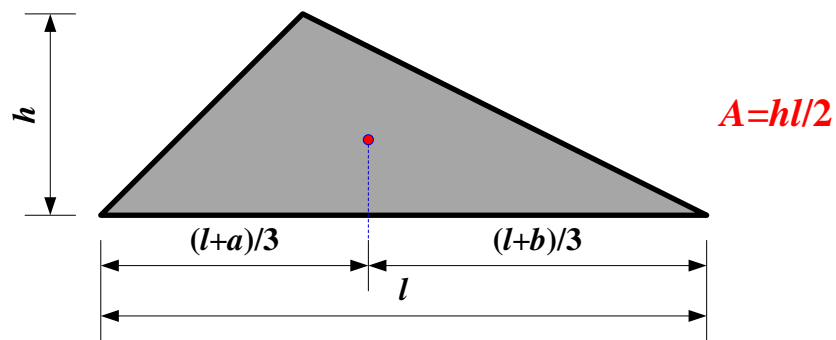
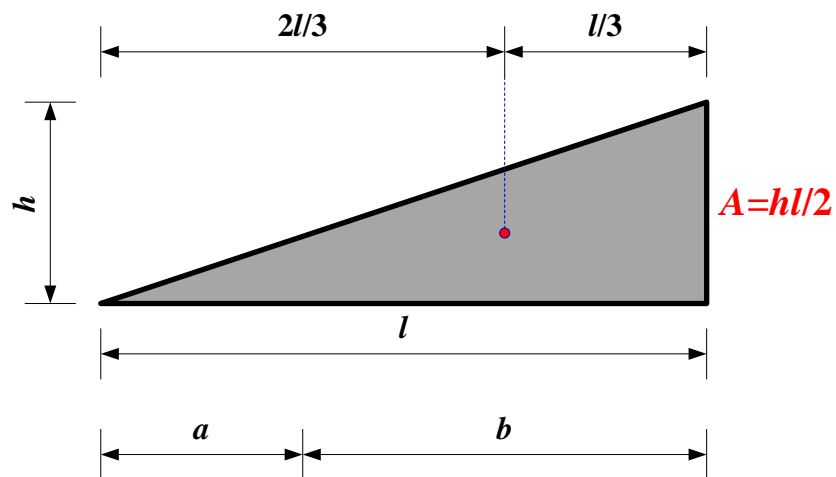
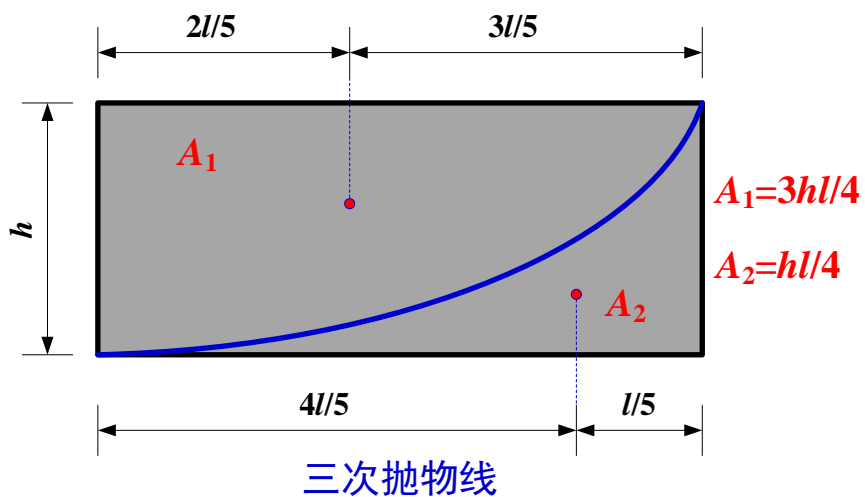
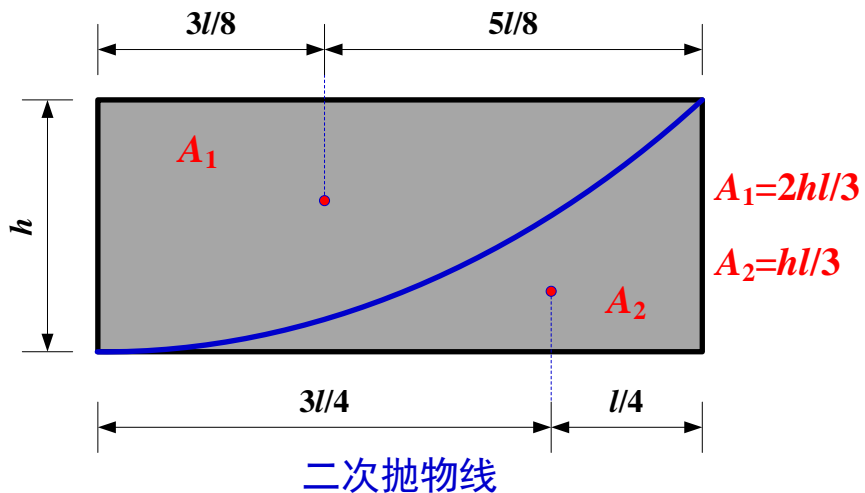
当弯矩图比较复杂，其面积或形心位置不易确定时，可以按照积分运算的规则，将其分解为几个简单的图形，分别与另一图形相乘，其代数和即为两图相乘的结果。

### • 复杂图形的处理



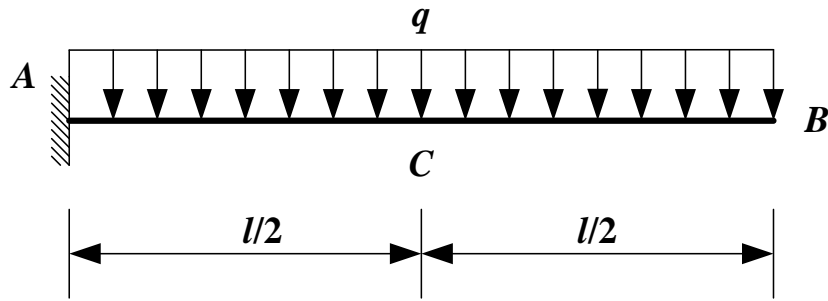
# 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

## 几种图形的面积和形心



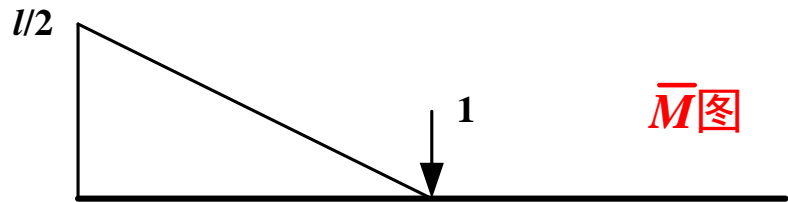
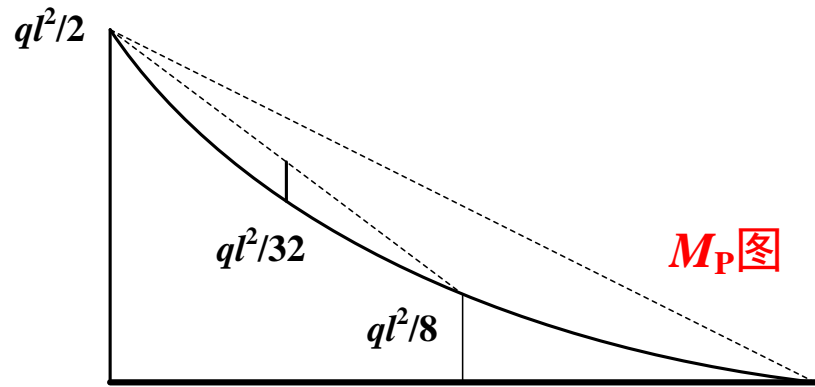
# 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

例：试计算图示悬臂梁B点的竖向位移，设 $EI$ 为常数。



$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds$$

作出悬臂梁在均布荷载作用下的 $M_P$ 图和单位荷载作用下的 $\bar{M}$ 图。

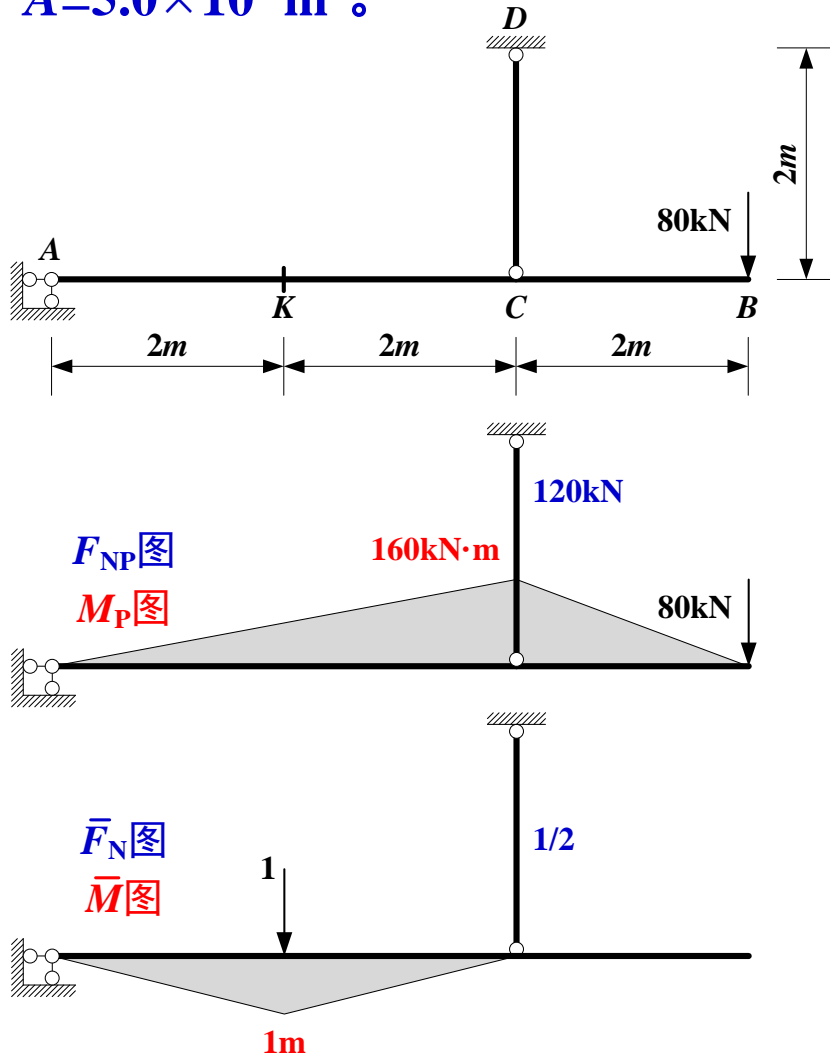


AC段的 $M_P$ 图可以看作是从一个梯形减去一个标准抛物线图形

$$\Delta_{yB} = \frac{l}{12EI} \left( 2 \times \frac{ql^2}{2} \times \frac{l}{2} + 0 + 0 + \frac{ql^2}{8} \times \frac{l}{2} \right) - \frac{1}{EI} \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{ql^2}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{17ql^4}{384EI} (\downarrow)$$

# 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

例：试求图示组合结构K点的竖向位移，已知 $E=2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ ,  $I=1.6 \times 10^{-4} \text{m}^4$ ,  $A=5.0 \times 10^{-4} \text{m}^2$ 。



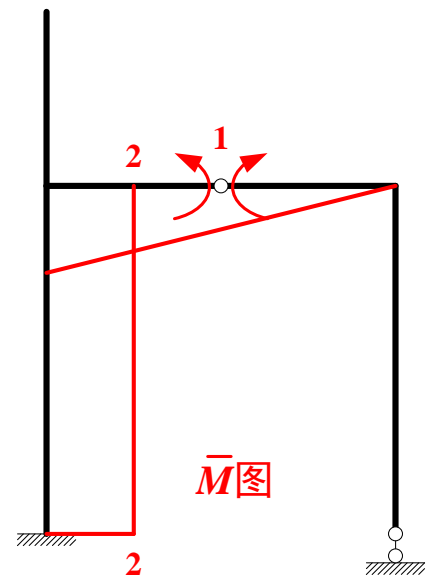
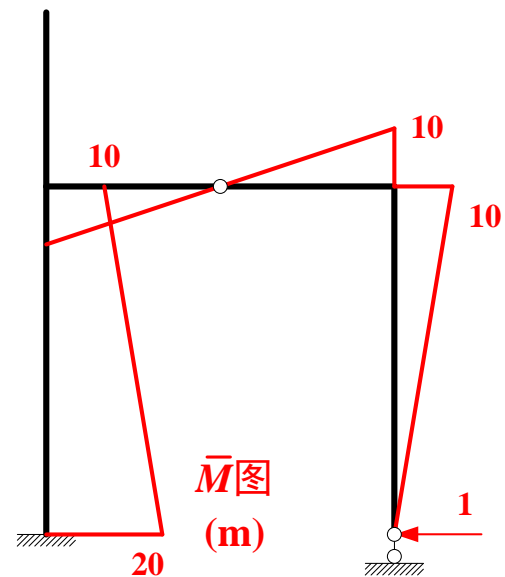
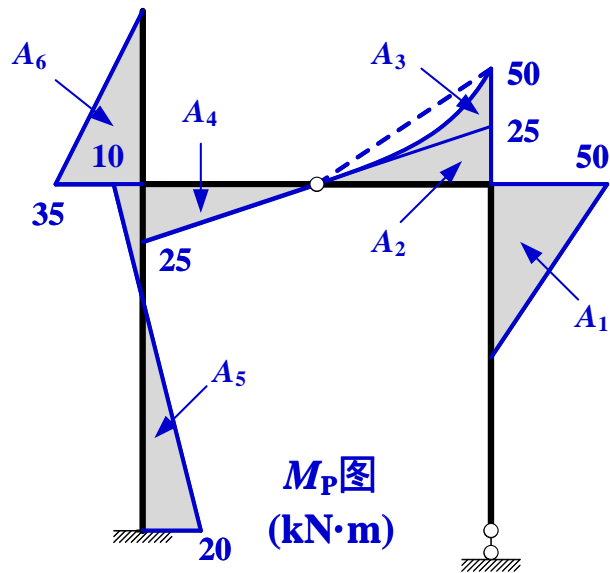
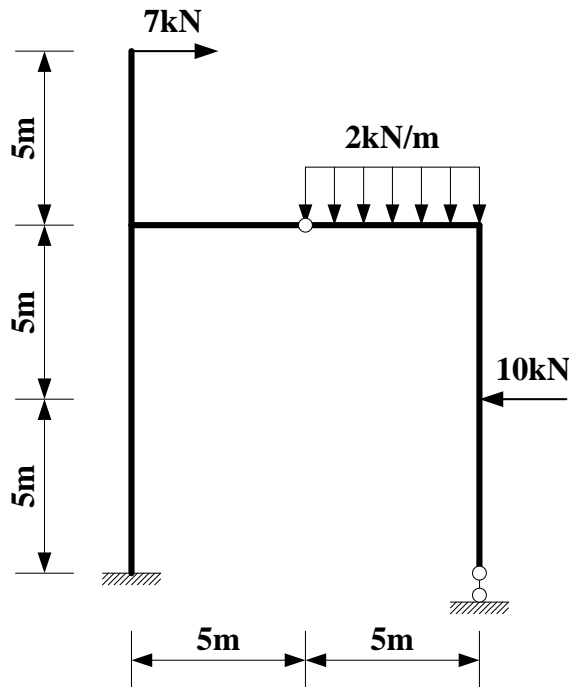
$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds$$

仅AC段需作图乘计算，由于AC段的 $M_P$ 图是直线，而 $\bar{M}$ 图却是折线，所以图乘时为了避免分段计算，可以取 $\bar{M}$ 图的面积乘以其相应的 $M_P$ 图中的竖标更为方便。

$$\begin{aligned} \Delta_{yK} &= -\frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \times 4\text{m} \times 1\text{m} \times \frac{1}{2} \times 160 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m} \\ &\quad + \frac{1}{EA} \times \frac{1}{2} \times 120 \times 10^3 \text{N} \times 2\text{m} \\ &= -4.76 \times 10^{-3} \text{m} + 1.14 \times 10^{-3} \text{m} \\ &= -3.62 \times 10^{-3} \text{m} (\uparrow) \end{aligned}$$

# 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

例：试求图示刚架K点的水平位移和铰F左右杆件截面间相对转角，设各杆EI相同。



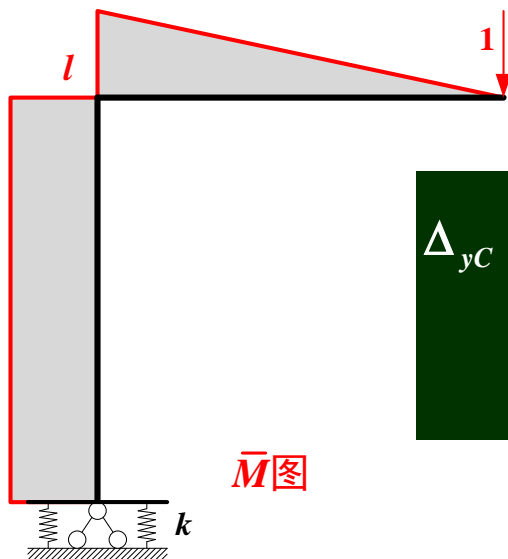
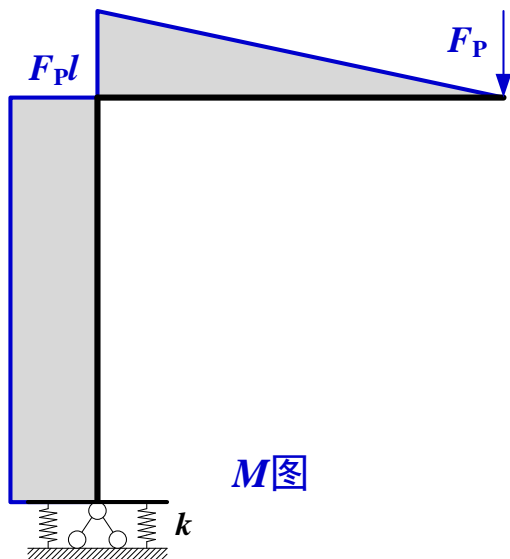
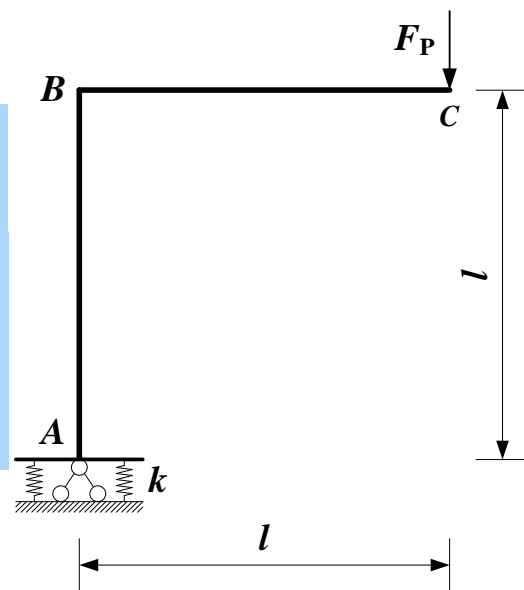
$$\Delta_{xB} = \frac{3188 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \quad \Delta_{\theta F} = \frac{2075 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

# 5.6 结构位移计算的简化方法-图乘法

## 带弹性支承的结构位移计算

$$\Delta_K = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds + \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + \sum \bar{F}_{SP} \cdot \frac{F_{SP}}{k}$$

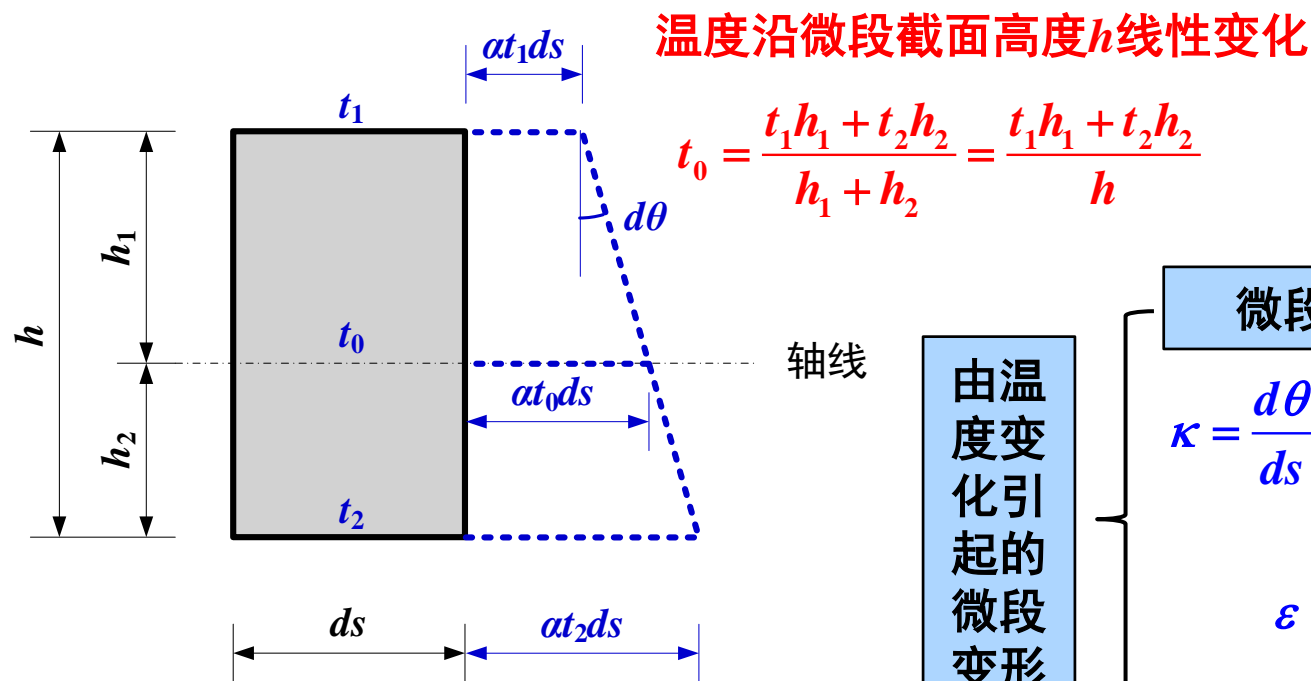
$\bar{F}_{SP}$ 为虚拟力状态中弹性支承的内力， $F_{SP}$ 为实际位移状态中弹性支承的内力，当两个内力方向相同时其乘积取正号，反之取负号。 $K$ 为弹性支承的刚度系数。



$$\begin{aligned} \Delta_{yC} &= \frac{1}{EI} \left( l \cdot F_P l \cdot l + \frac{l}{2} \cdot F_P l \cdot \frac{2l}{3} \right) + l \cdot \frac{F_P l}{k} \\ &= \frac{4F_P l^3}{EI} + \frac{F_P l^2}{k} (\downarrow) \end{aligned}$$

# 5.7 静定结构在非荷载作用下的位移计算

## 温度变化引起的位移



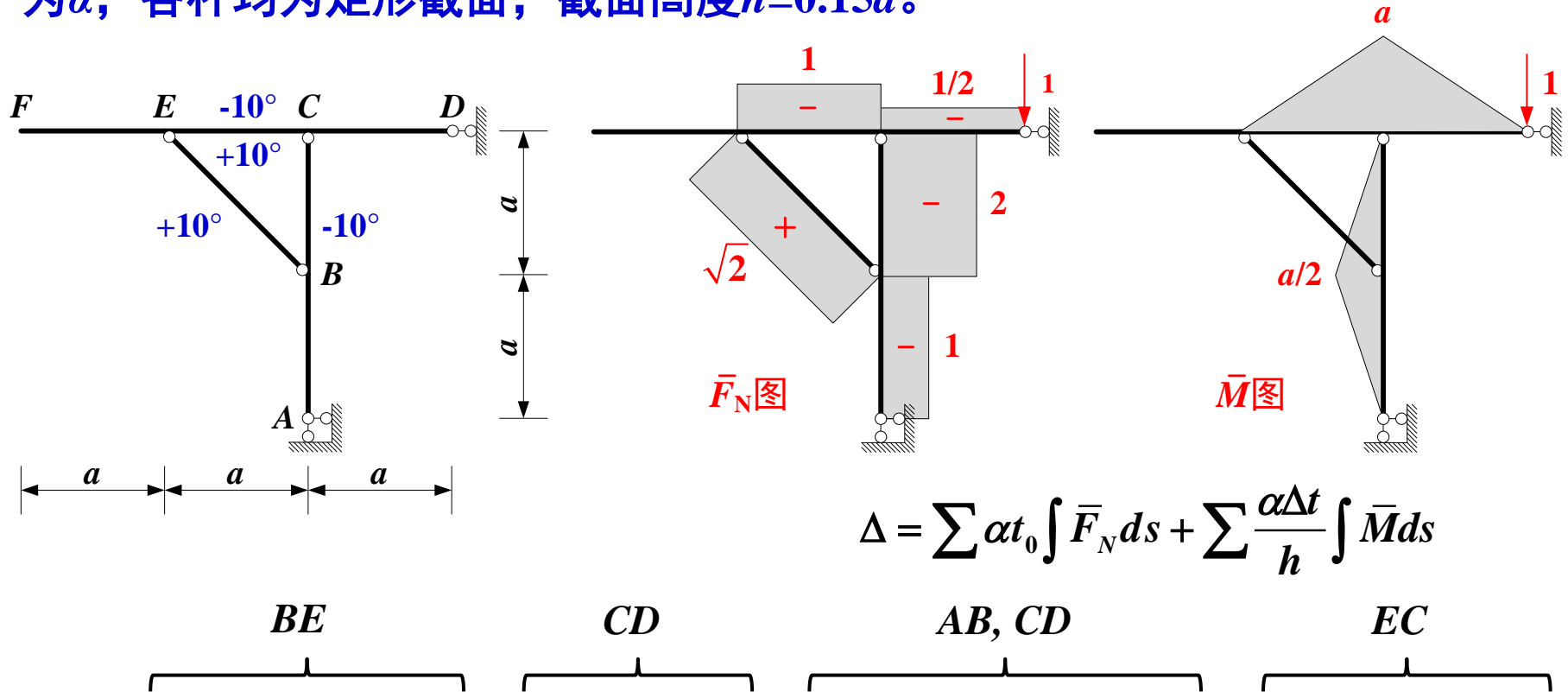
## 温度变化引起的位移计算公式

$$\begin{cases} \Delta_{Kt} = \sum \int \bar{F}_N \alpha t_0 ds + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds \\ \Delta_{Kt} = \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds \end{cases}$$

正负号规定：虚力状态中的变形与温度改变产生的变形方向一致时，取正号，反之取负号。

# 5.7 静定结构在非荷载作用下的位移计算

例：试求图示结构由于温度变化引起的 $D$ 点竖向位移。设材料的线膨胀系数为 $\alpha$ ，各杆均为矩形截面，截面高度 $h=0.15a$ 。



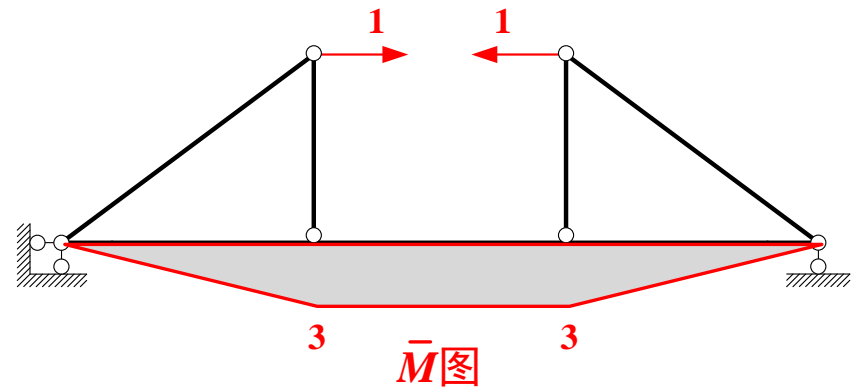
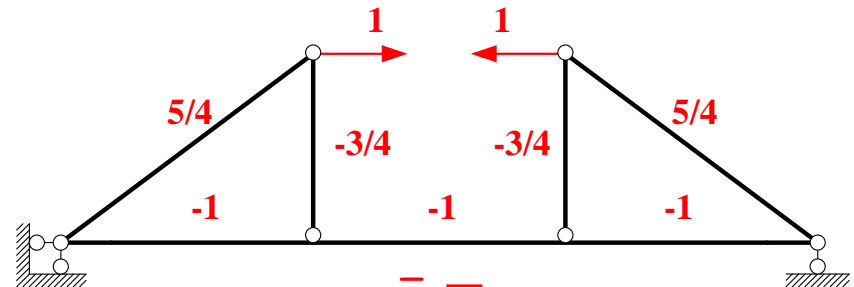
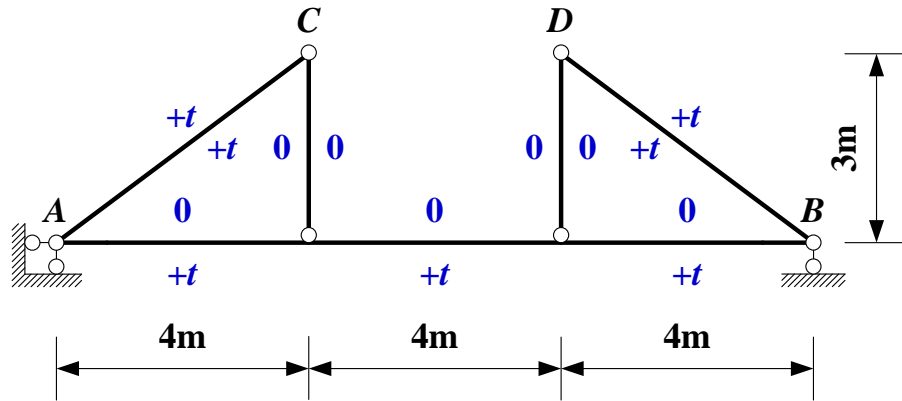
$$\Delta = \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds$$

$$\begin{aligned} \Delta_{yD} &= \alpha \times 10 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}a + \alpha \times 10 \times \frac{1}{2} \times a + \alpha \times \frac{20}{0.15a} \times \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{a}{2} - \alpha \times \frac{20}{0.15a} \times \frac{1}{2} a^2 \\ &= 25\alpha a \end{aligned}$$



# 5.7 静定结构在非荷载作用下的位移计算

练习：图示结构材料的温度线膨胀系数为 $\alpha$ ，各杆横截面均为矩形，截面高度为 $h=0.5\text{m}$ ，试求C、D点间的距离变化



$$\Delta = \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds$$

$$\Delta_{CD} = \alpha t \times \frac{5}{4} \times 5 \times 2 - \frac{\alpha t}{2} \times 1 \times 12 + \frac{\alpha t}{0.5} \times \frac{(12+4) \times 3}{2} = 54.5 \alpha t$$

# 5.7 静定结构在非荷载作用下的位移计算

## 制造误差（或材料收缩）引起的位移

杆件的制造误差（或材料收缩）可以等同于杆件受到均匀温度变化产生的变形，因此制造误差（或材料收缩）引起的位移计算，其原理与计算温度变化引起的位移相同，只需将材料收缩或制造误差引起的实际变形视作虚拟平衡状态的虚位移，将温度变化引起的位移计算公式稍加改变即可。

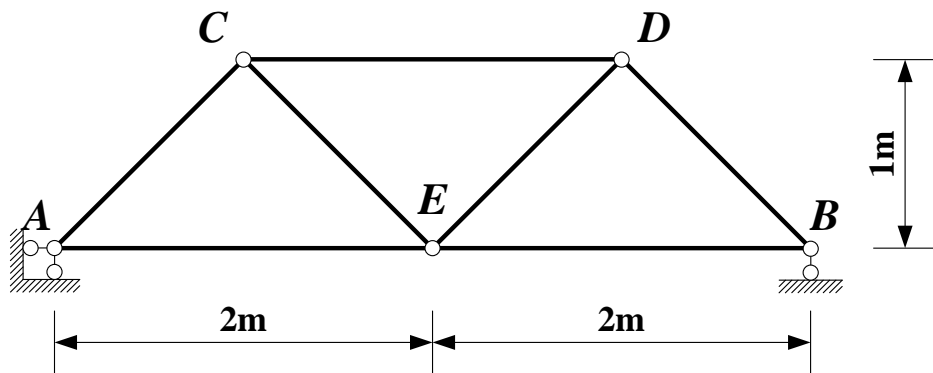
$$\text{温度变化引起的位移计算公式} \quad \begin{cases} \Delta_{Kt} = \sum \int \bar{F}_N \alpha t_0 ds + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds \\ \Delta_{Kt} = \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds \end{cases}$$

$$\text{制造误差引起的位移计算公式: } \Delta_{K\lambda} = \sum \bar{F}_N \lambda \Rightarrow \Delta_{K\lambda} = \sum \bar{F} \lambda$$

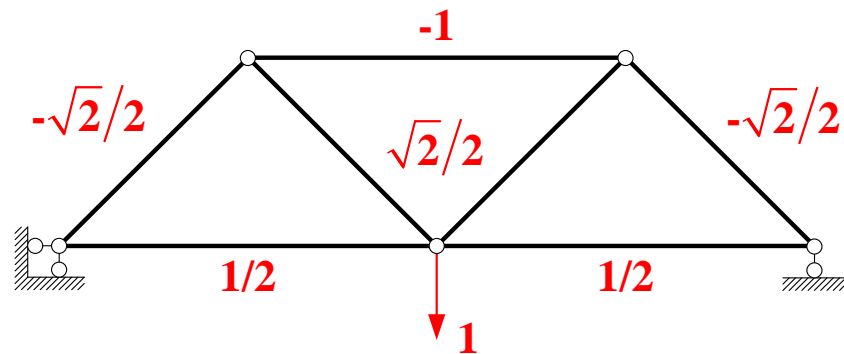
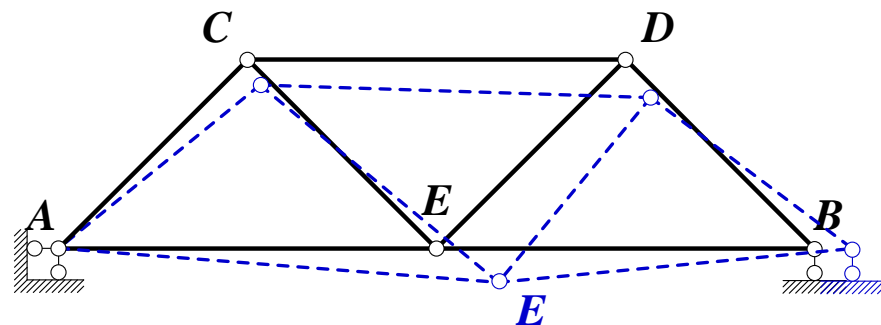
式中： $\lambda$ 为实际状态中杆件的制造误差（或材料收缩）， $\bar{F}$ 为虚拟状态中与 $\lambda$ 对应的杆件截面内力。当 $\bar{F}$ 所引起的变形与 $\lambda$ 方向一致时，其乘积取正号，反之取负号。

## 5.7 静定结构在非荷载作用下的位移计算

例：设图示桁架结构中下弦杆 $AE$ 和 $EB$ 的制作比设计尺寸偏长0.5%，试求由此引起的 $E$ 点的竖向位移。

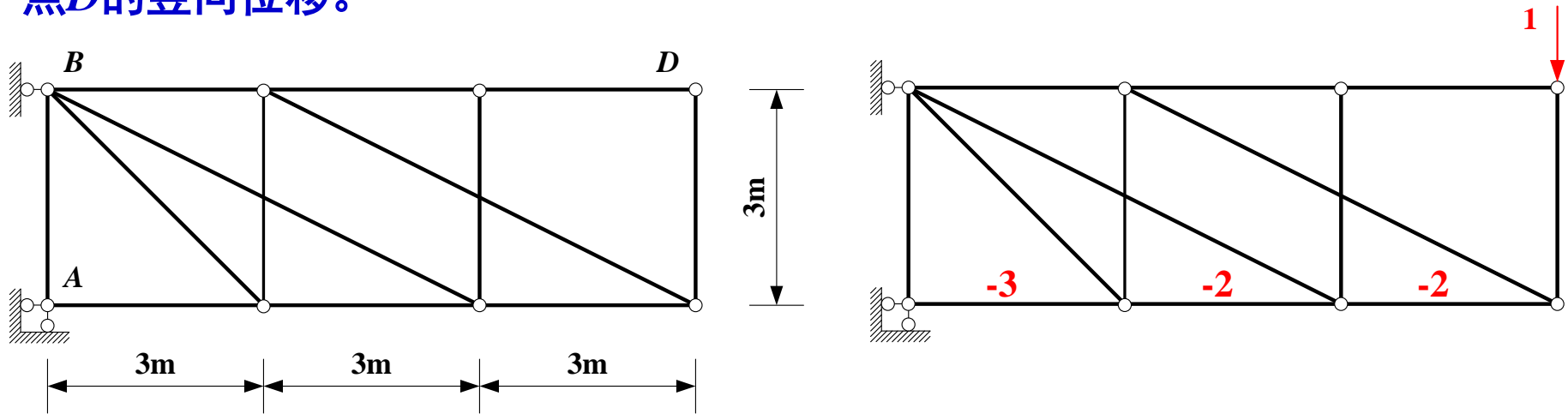


$$\Delta_{yE} = \sum \bar{F} \lambda = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{1000} \times 2\text{m} = 0.01\text{m} (\downarrow)$$

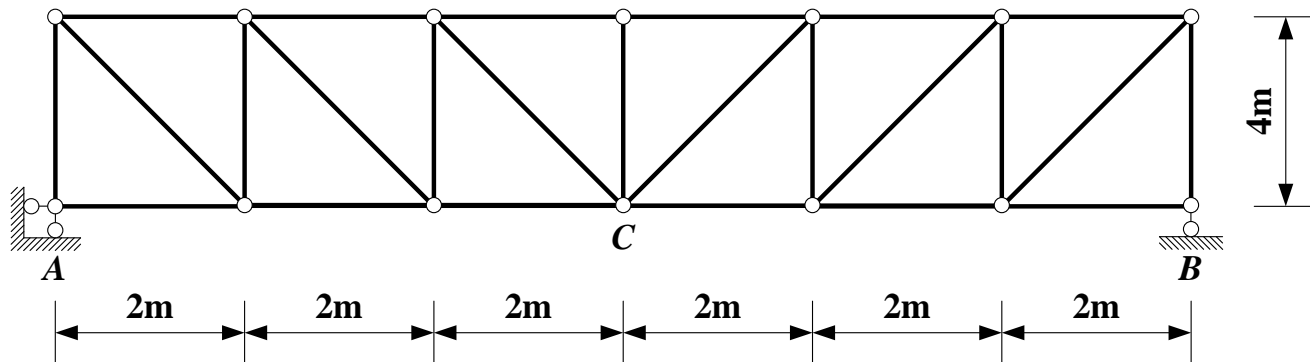


# 5.7 静定结构在非荷载作用下的位移计算

练习：设图示桁架制造时，下弦各杆均比设计尺寸长 $a/1400$ 。试求装配后结点 $D$ 的竖向位移。



$$\Delta_{yD} = \sum \bar{F}_N \lambda = -3 \times \frac{a}{1400} - 2 \times \frac{a}{1400} - 2 \times \frac{a}{1400} = -\frac{a}{200} (\uparrow)$$

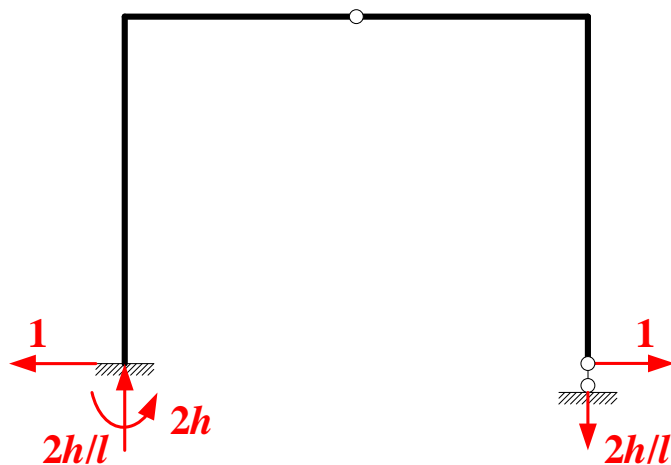
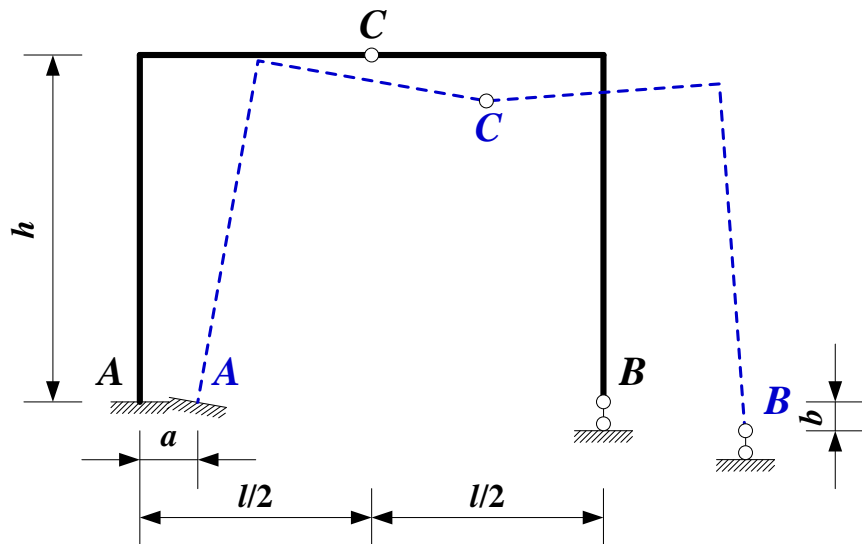


## 5.7 静定结构在非荷载作用下的位移计算

## 支座位移引起的位移

$$\Delta_K = -\sum \bar{F}_R \mathbf{c}$$

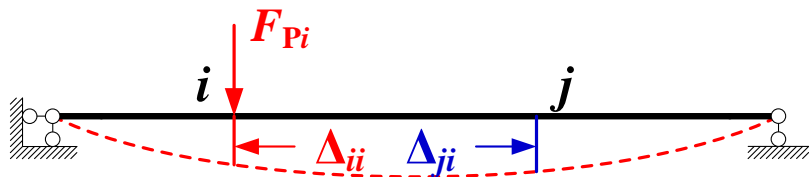
**例：设图示桁架结构中下弦杆 $AE$ 和 $EB$ 的制作比设计尺寸偏长0.5%，试求由此引起的 $E$ 点的竖向位移。**



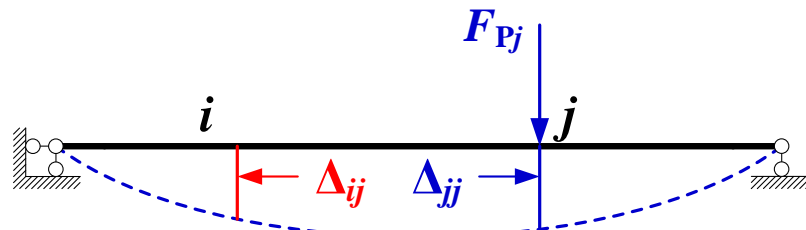
$$\Delta_{xB} = - \left( -1 \cdot a - 2h \cdot \theta + \frac{2h}{l} \cdot b \right) = a + 2h\theta - \frac{2h}{l}b \quad (\rightarrow)$$

# 5.8 线弹性体系的互等定理

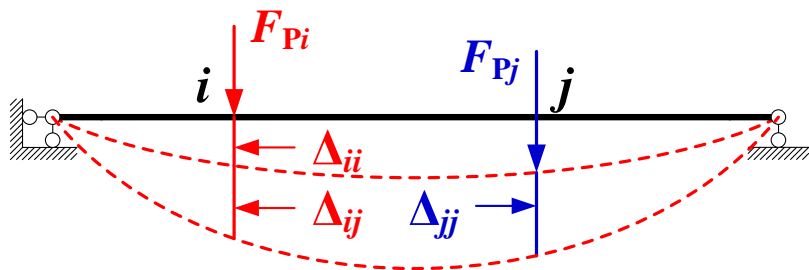
## 功的互等定理



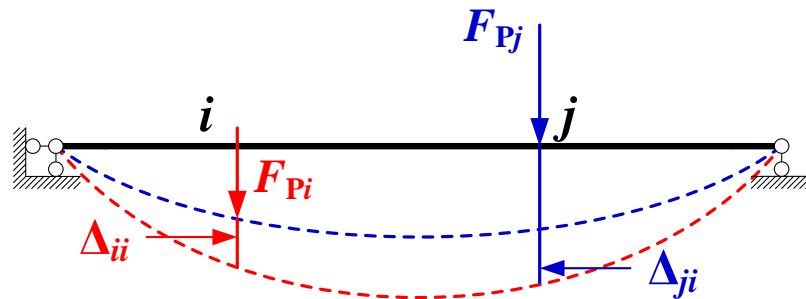
状态*i*



状态*j*



先加 $F_{Pi}$ 后加 $F_{Pj}$



先加 $F_{Pj}$ 后加 $F_{Pi}$

$$W_1 = \frac{1}{2} F_{Pi} \Delta_{ii} + F_{Pi} \Delta_{ij} + \frac{1}{2} F_{Pj} \Delta_{jj}$$

$$F_{Pi} \Delta_{ij} = F_{Pj} \Delta_{ji}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} F_{Pj} \Delta_{jj} + F_{Pj} \Delta_{ji} + \frac{1}{2} F_{Pi} \Delta_{ii}$$

**功的互等定理：** 状态*i*的外力在状态*j*的位移上所作的功等于外力状态*j*的力在状态*i*的位移上作的功。

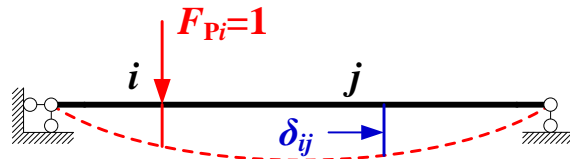
# 5.8 线弹性体系的互等定理

## 功的互等定理

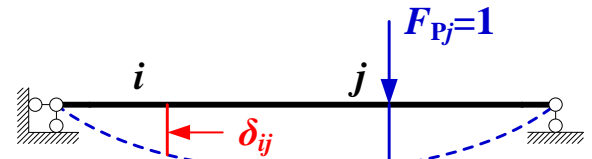
$$F_{Pi} \Delta_{ij} = F_{Pj} \Delta_{ji}$$

## 位移互等定理

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$



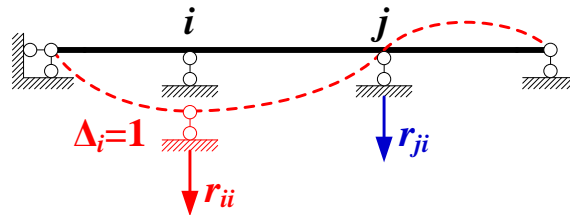
状态*i*



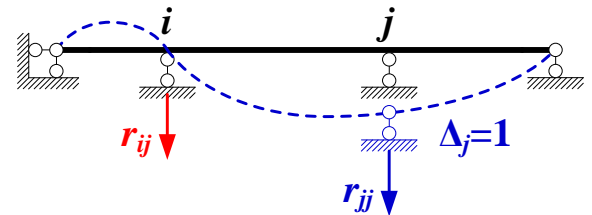
状态*j*

## 反力互等定理

$$r_{ij} = r_{ji}$$



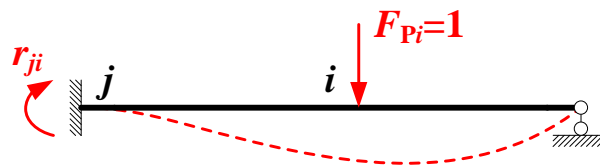
状态*i*



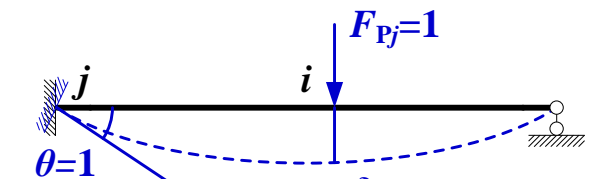
状态*j*

## 反力与位移互等定理

$$r_{ij} = -\delta_{ij}$$



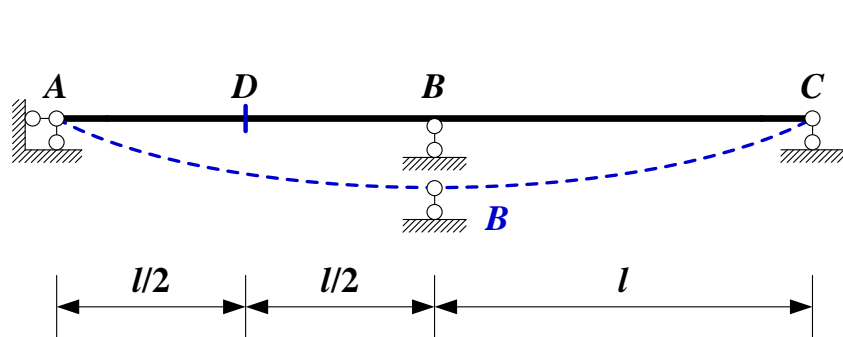
状态*i*



状态*j*

# 5.8 线弹性体系的互等定理

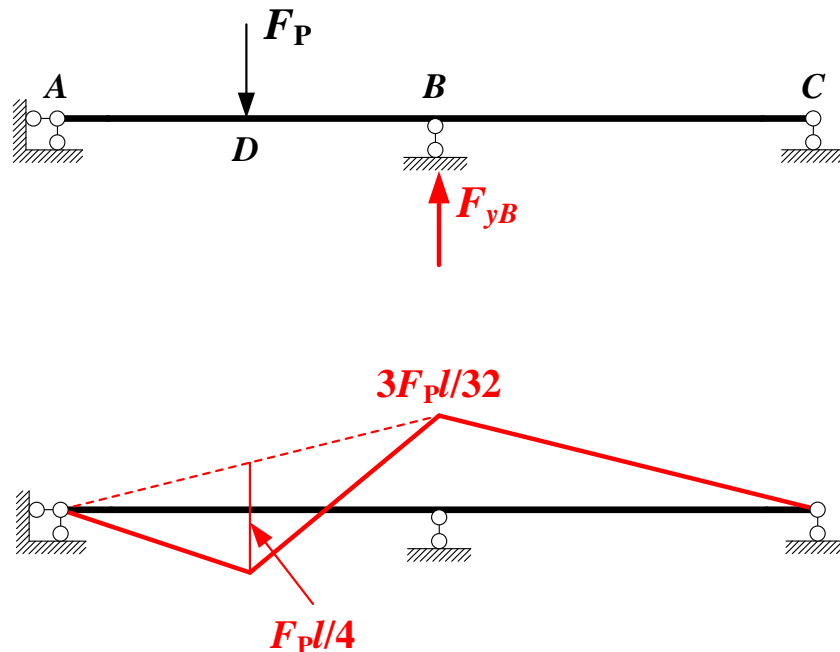
例：如左下图所示，支座B下沉 $\Delta_{BV}=1$ 时，点D的竖向位移是 $\Delta_{DV}=11/16$ ，试绘制右下图的弯矩图。



• 根据反力位移互等定理：

$$F_P \cdot \Delta_{DV} + F_{yB} \cdot \Delta_{BV} = 0$$

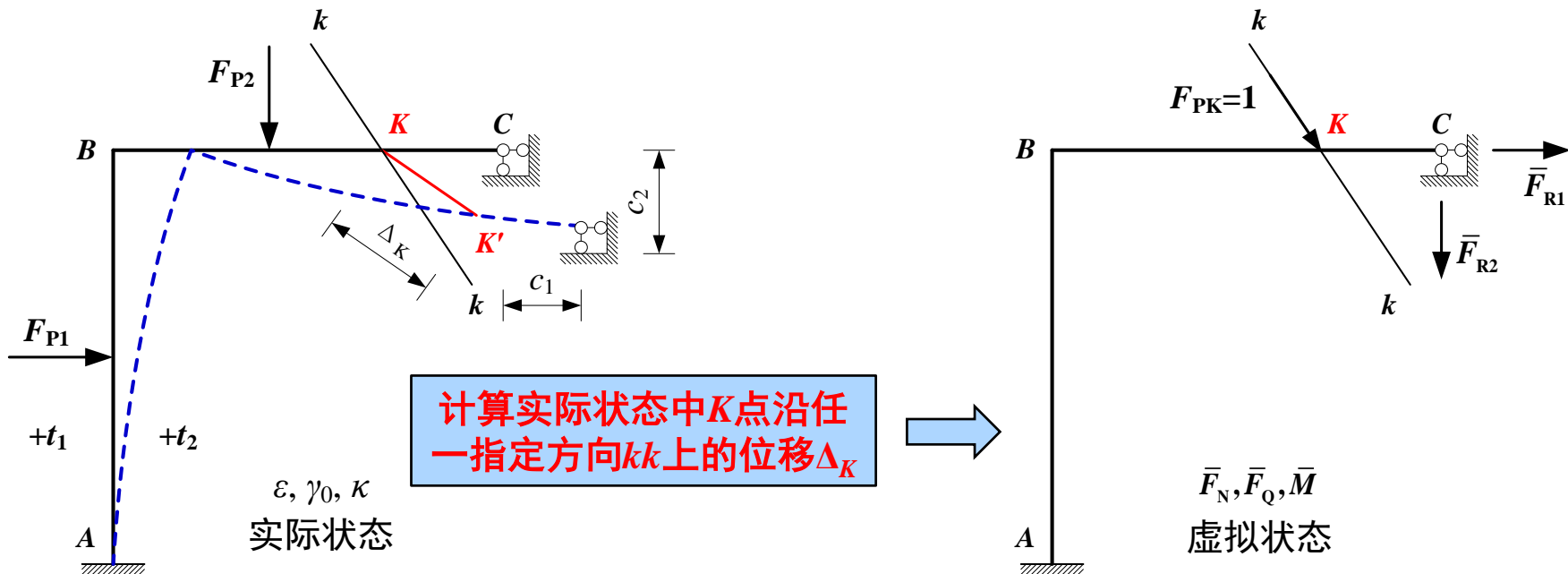
$$\Rightarrow F_{yB} = -\frac{\Delta_{BV}}{\Delta_{DV}} F_P = -\frac{11}{16} F_P (\uparrow)$$





# 5.9 典型例题解析

## 位移计算方法归纳



$$1 \cdot \Delta_K + \sum \bar{F}_R c = \sum \int (\bar{F}_N \varepsilon + \bar{F}_Q \gamma_0 + \bar{M} \kappa) ds \Rightarrow \Delta_K = \sum \int (\bar{F}_N \varepsilon + \bar{F}_Q \gamma_0 + \bar{M} \kappa) ds - \sum \bar{F}_R c$$

• 支座移动引起的位移:  $\Delta_K = -\sum \bar{F}_R c$

• 荷载作用引起的位移:  $\Delta_K = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds + \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds$

# 5.9 典型例题解析

## 位移计算方法归纳

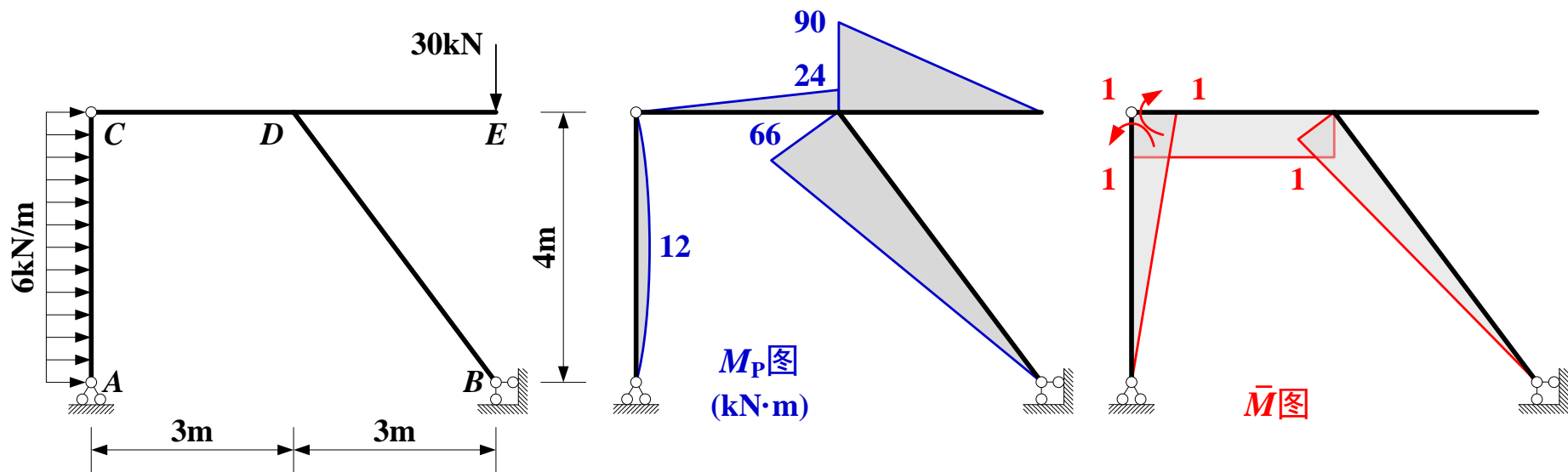
$$1 \cdot \Delta_K + \sum \bar{F}_R c = \sum \int (\bar{F}_N \varepsilon + \bar{F}_Q \gamma_0 + \bar{M} \kappa) ds \Rightarrow \Delta_K = \sum \int (\bar{F}_N \varepsilon + \bar{F}_Q \gamma_0 + \bar{M} \kappa) ds - \sum \bar{F}_R c$$

- 支座移动引起的位移:  $\Delta_K = -\sum \bar{F}_R c$
- 荷载作用引起的位移:  $\Delta_K = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds + \sum \int k \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds + \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds$
- 温度改变引起的位移:  $\Delta_K = \sum \int \bar{F}_N \alpha t_0 ds + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds$   
 $= \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds$
- 制造误差引起的位移:  $\Delta_K = -\sum \bar{F} \lambda$
- 弹性支承结构的位移计算:  $\Delta_K = \Delta_0 + \sum \bar{F}_{SP} \cdot \frac{F_{SP}}{k}$

各种因素同时作用时可先分别计算各种因素单独作用下的位移再叠加求总位移

# 5.9 典型例题解析

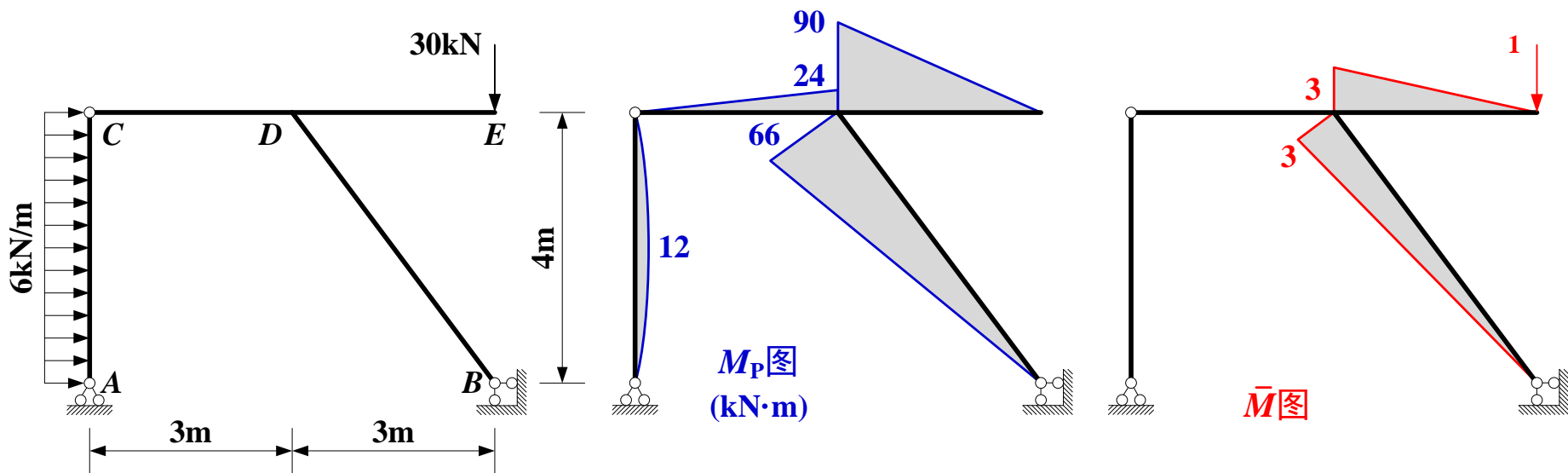
例：图示刚架中结点D是由杆件CE和BD焊接而成，焊接过程中由于操作误差使得夹角BDC比原设计角度减小了 $\theta$ 。试计算刚架在图示荷载作用下结点C两侧截面的相对转角以及截面E的竖向位移。各杆EI相同。



$$\varphi_C = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds + \sum \bar{F} \lambda = \frac{1}{EI} \left( \frac{2 \times 4 \times 12}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{3 \times 24}{2} \times 1 + \frac{5 \times 66}{2} \times \frac{2}{3} \right) - 1 \times \theta = \frac{90}{EI} - 3\theta$$

# 5.9 典型例题解析

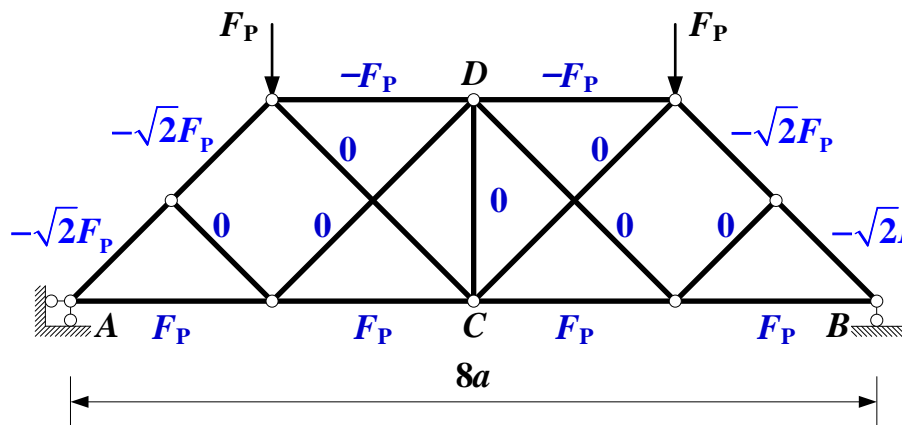
例：图示刚架中结点D是由杆件CE和BD焊接而成，焊接过程中由于操作误差使得夹角BDC比原设计角度减小了 $\theta$ 。试计算刚架在图示荷载作用下结点C两侧截面的相对转角以及截面E的竖向位移。各杆EI相同。



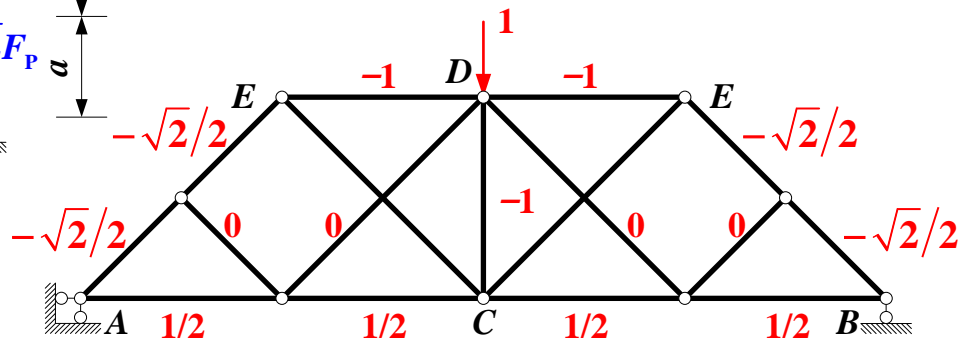
$$\Delta_{yE} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds + \sum \bar{F} \lambda = \frac{1}{EI} \left( \frac{3 \times 90}{2} \times \frac{2}{3} \times 3 + \frac{5 \times 66}{2} \times \frac{2}{3} \times 3 \right) - 3 \times \theta = \frac{600}{EI} - 3\theta (\downarrow)$$

# 5.9 典型例题解析

例：图示桁架拟采用调整杆件 $CD$ 的长度的方法控制节点 $D$ 在荷载作用下的竖向位移。试计算在图示荷载作用下，为使结点 $D$ 的竖向位移为零时杆件 $CD$ 的长度调整值量，并计算此时杆件 $DE$ 和 $DF$ 的相对转角。各杆 $EA$ 相同。



桁架结构在荷载与制造误差共同作用的位移计算问题



$\bar{F}_N$ 图

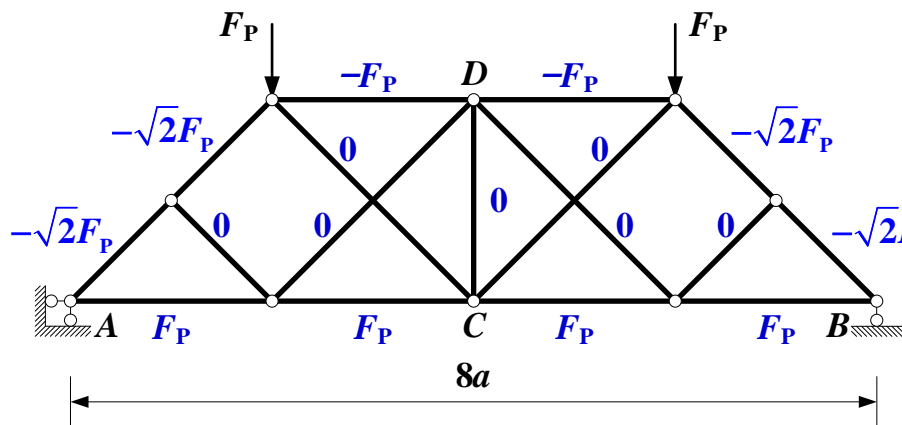
- 求实际状态和虚拟状态的内力
- 计算 $CD$ 的长度调整量

$$\begin{aligned}\Delta_{yD} &= \sum \frac{\bar{F}_N F_N l}{EA} + \sum \bar{F}_N \lambda = \frac{1}{EA} \left[ \frac{1}{2} \times F_P \times 2a \times 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} F_P \times \sqrt{2} a \times 4 + 1 \times F_P \times 2a \times 2 \right] - 1 \times \lambda \\ &= \frac{(8 + 4\sqrt{2}) F_P a}{EA} - \lambda\end{aligned}$$

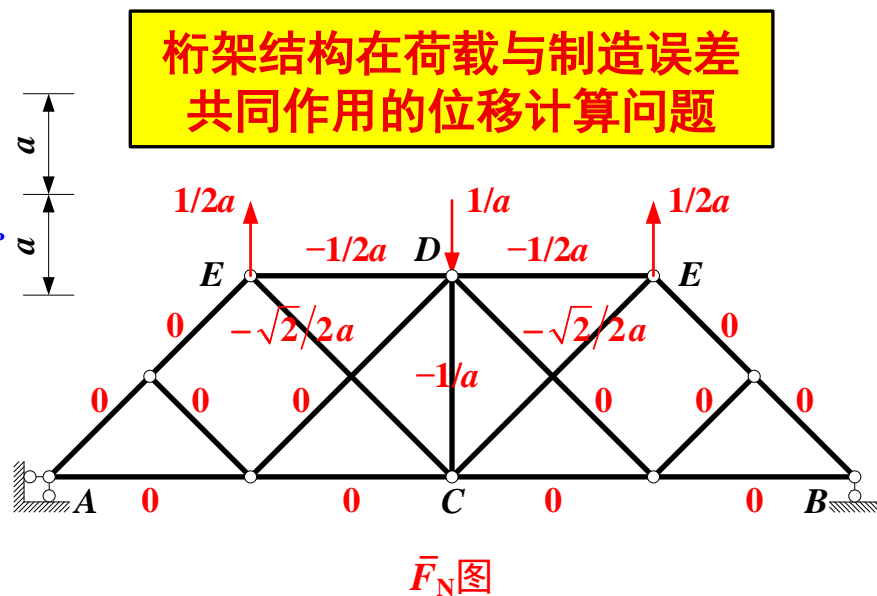
$$\Delta_{yD} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{(8 + 4\sqrt{2}) F_P a}{EA}$$

# 5.9 典型例题解析

例：图示桁架拟采用调整杆件 $CD$ 的长度的方法控制节点 $D$ 在荷载作用下的竖向位移。试计算在图示荷载作用下，为使结点 $D$ 的竖向位移为零时杆件 $CD$ 的长度调整值量，并计算此时杆件 $DE$ 和 $DF$ 的相对转角。各杆 $EA$ 相同。



- 求实际状态和虚拟状态的内力
- 计算 $DE$ 和 $DF$ 杆的相对转角



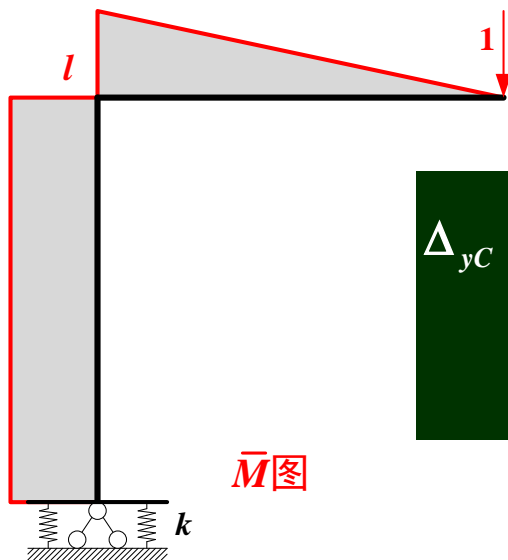
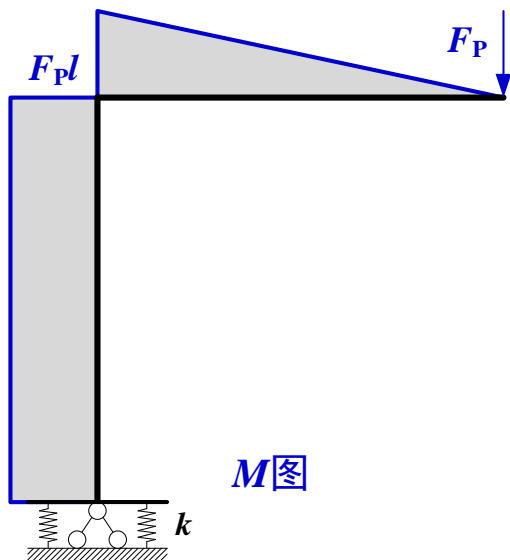
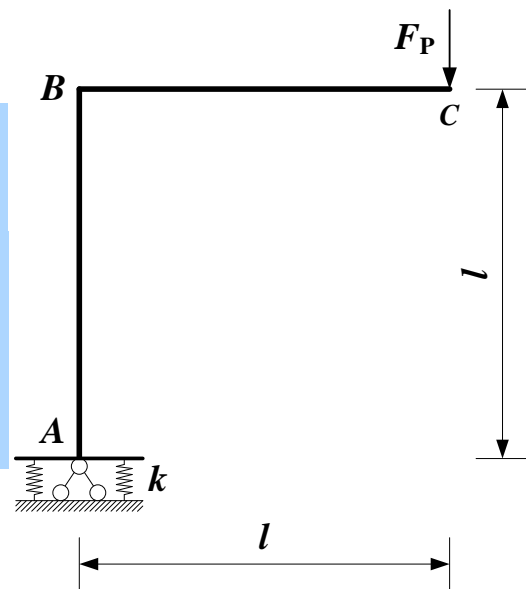
$$\varphi_{DE-DF} = \sum \frac{\bar{F}_N F_N l}{EA} + \sum \bar{F}_N \lambda = \frac{1}{EA} \left[ \left( -\frac{1}{2a} \right) \times (-F_P) \times 2a \times 2 \right] - \frac{1}{a} \times \lambda = -\frac{(6 + 4\sqrt{2}) F_P a}{EA}$$

# 5.9 典型例题解析

## 带弹性支承的结构位移计算

$$\Delta_K = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds + \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + \sum \bar{F}_{SP} \cdot \frac{F_{SP}}{k}$$

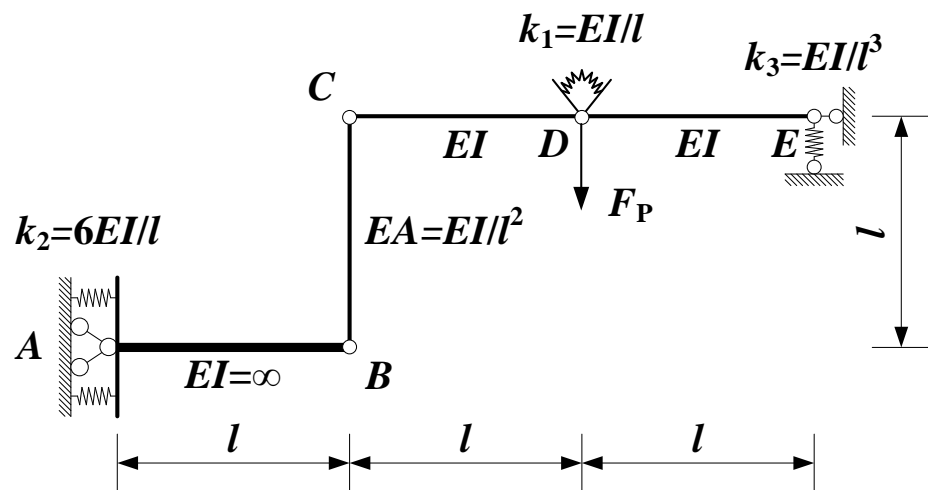
$\bar{F}_{SP}$ 为虚拟力状态中弹性支承的内力， $F_{SP}$ 为实际位移状态中弹性支承的内力，当两个内力方向相同时其乘积取正号，反之取负号。 $k$ 为弹性支承的刚度系数。



$$\begin{aligned} \Delta_{yC} &= \frac{1}{EI} \left( l \cdot F_P l \cdot l + \frac{l}{2} \cdot F_P l \cdot \frac{2l}{3} \right) + l \cdot \frac{F_P l}{k} \\ &= \frac{4F_P l^3}{EI} + \frac{F_P l^2}{k} (\downarrow) \end{aligned}$$

# 5.9 典型例题解析

例：试求图示结构中D点的竖向位移。

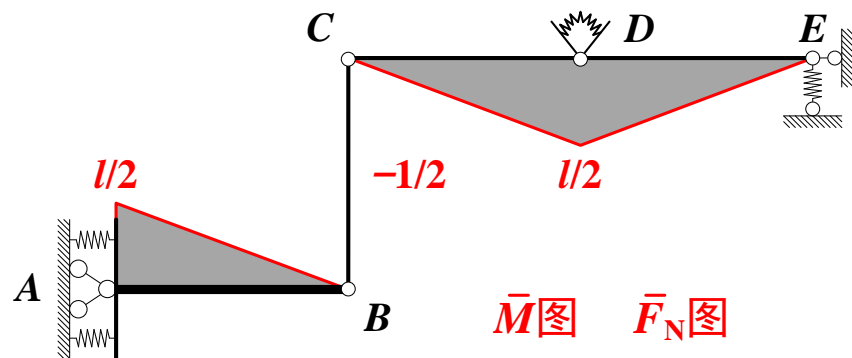
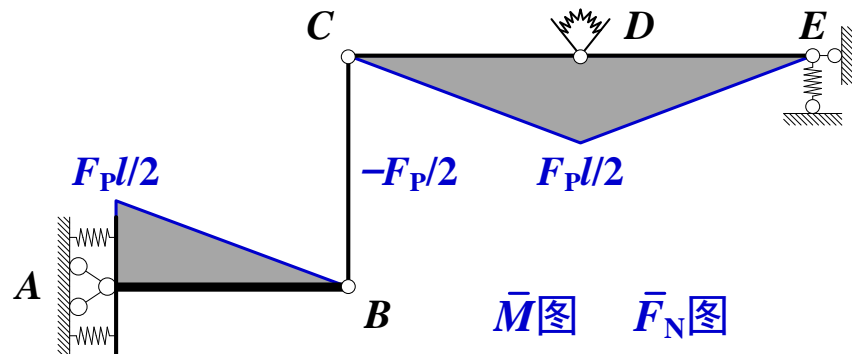


$$\Delta_{k_1} = \frac{l}{2} \cdot \frac{F_P l}{2} \cdot \frac{l}{EI} = \frac{F_P l^3}{4EI} (\downarrow)$$

$$\Delta_{k_2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{F_P l}{2} \cdot \frac{l}{6EI} = \frac{F_P l^3}{24EI} (\downarrow)$$

$$\Delta_{k_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_P}{2} \cdot \frac{l^3}{EI} = \frac{F_P l^3}{4EI} (\downarrow)$$

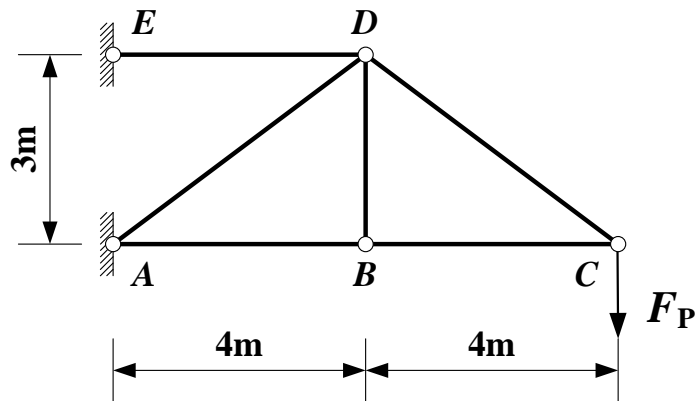
$$\Delta_{F_P} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{F_P l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot 2 + \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{F_P}{2} \right) \cdot l \cdot \frac{1}{EA} = \frac{5F_P l^3}{12EI} (\downarrow) \quad \Delta_{CV} = \frac{23F_P l^3}{24EI} (\downarrow)$$





## 5.9 典型例题解析

例：如下图所示桁架结构，欲在荷载从0至 $F_P$ 的加载过程中 $B$ 点不产生竖向位移， $AD$ 杆的温度应如何变化。设其他杆件温度保持不变，各杆线膨胀系数为 $\alpha$ ， $EA$ 均为常数。



$$t = \frac{253F_P}{75EA\alpha}$$

## 5.9 典型例题解析

例：图示结构 $ABC$ 为刚性杆，其余各杆 $EI$ 和 $EA$ 均为常数， $G$ 处弹簧的刚度系数为 $k=3EI/20$ ，试计算 $G$ 处的水平位移。

