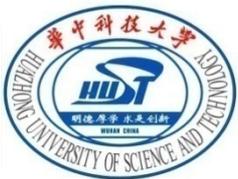


# 结构力学

## Structural Analysis

华中科技大学土木工程与力学学院

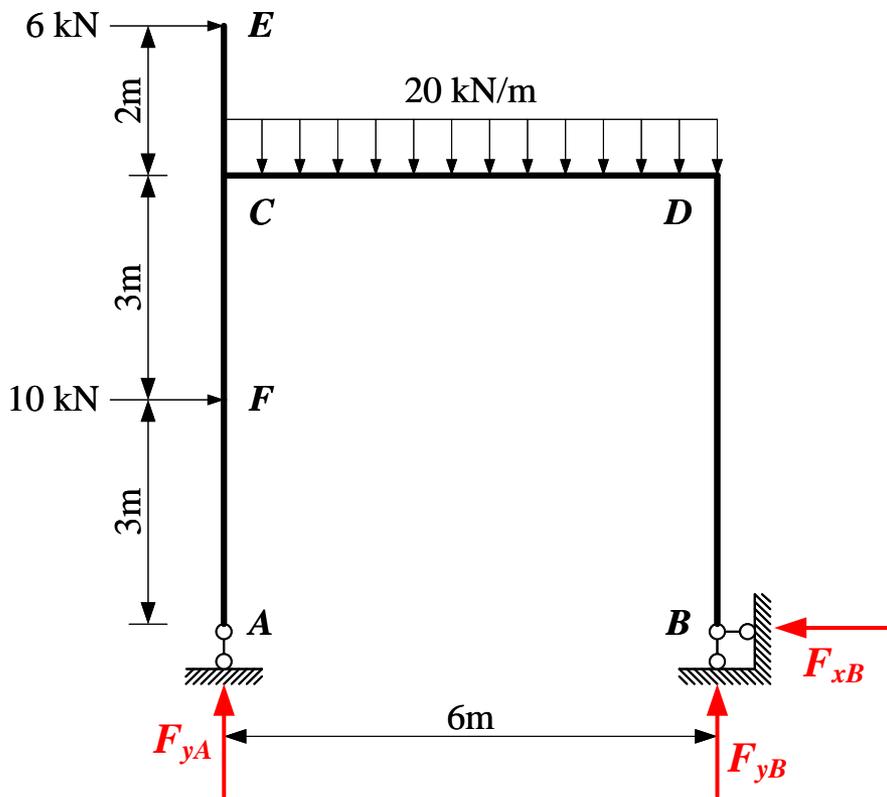


# 第3章 静定结构受力分析

华中科技大学土木工程与力学学院

# 3.4 静定刚架

例1：画出图示刚架的内力图



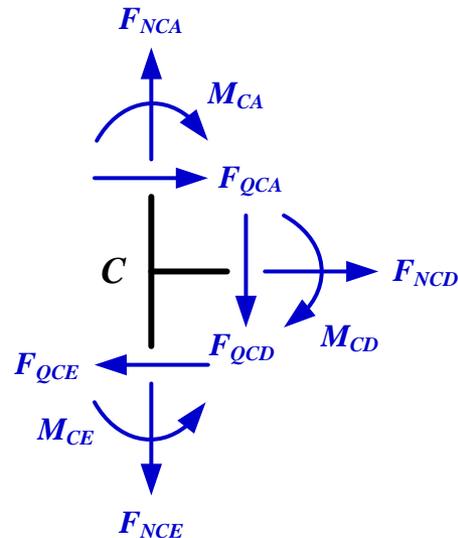
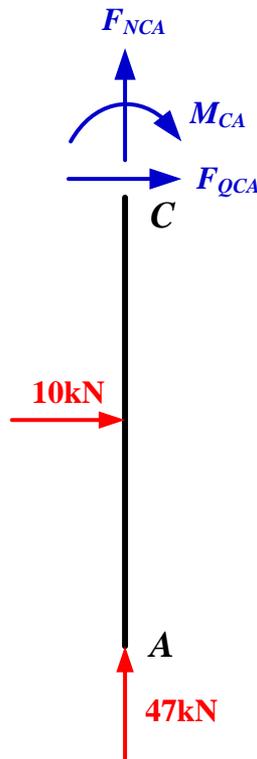
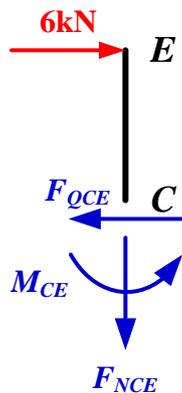
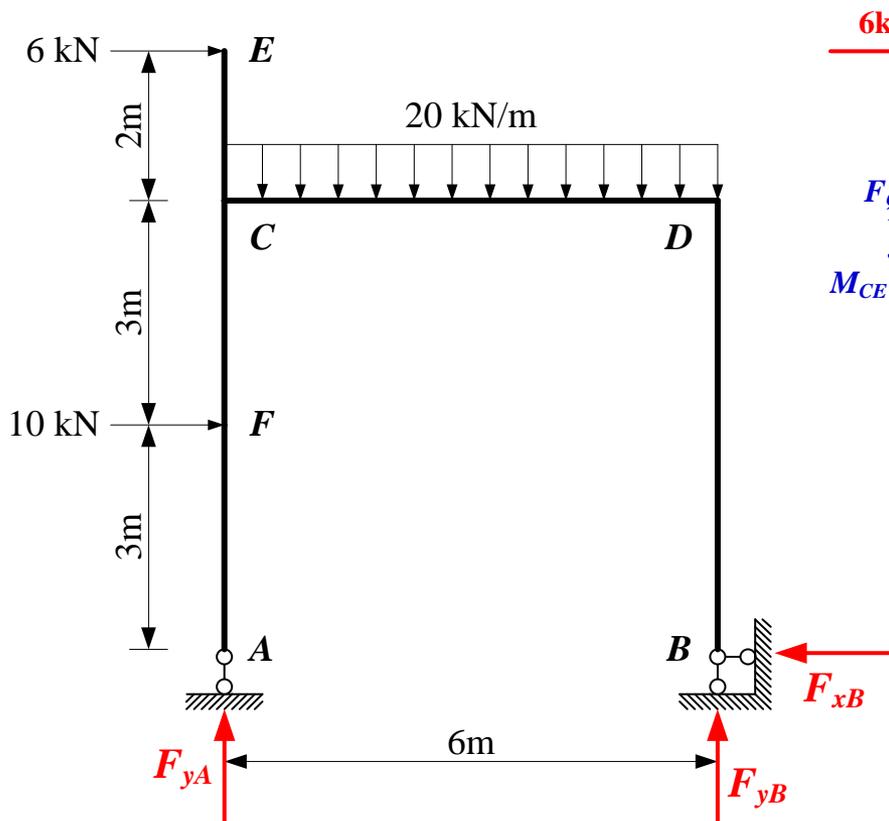
利用刚架整体平衡条件求支座反力

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_{xB} = 16\text{kN} \\ F_{yA} = 47\text{kN} \\ F_{yB} = 73\text{kN} \end{cases}$$

截取刚架结点或构件作为隔离体计算杆端内力

# 3.4 静定刚架

例1：画出图示刚架的内力图



$$M_{CD} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{QCD} = 47 \text{ kN}$$

$$F_{NCD} = -16 \text{ kN}$$

$$M_{CE} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{QCE} = 6 \text{ kN}$$

$$F_{NCE} = 0 \text{ kN}$$

$$M_{CA} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

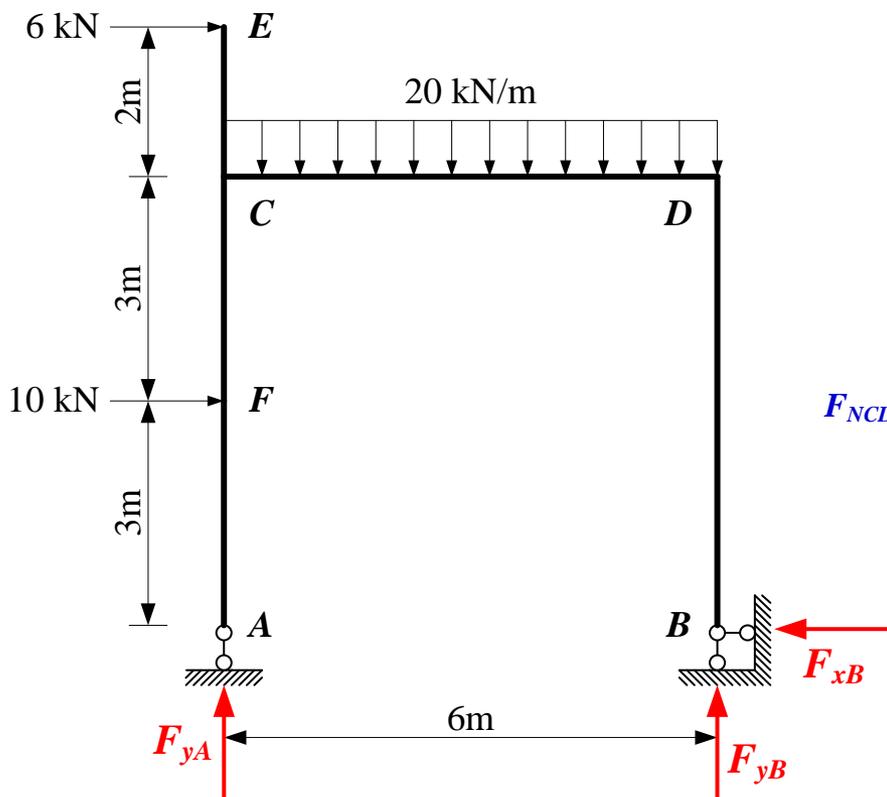
$$F_{QCA} = -10 \text{ kN}$$

$$F_{NCA} = -47 \text{ kN}$$

为了使内力符号不发生混淆，在内力符号中加入两个下标，标明杆端内力所属的杆件，前一个为内力所属的杆端截面代号，后一个为该杆件的另一端代号。

# 3.4 静定刚架

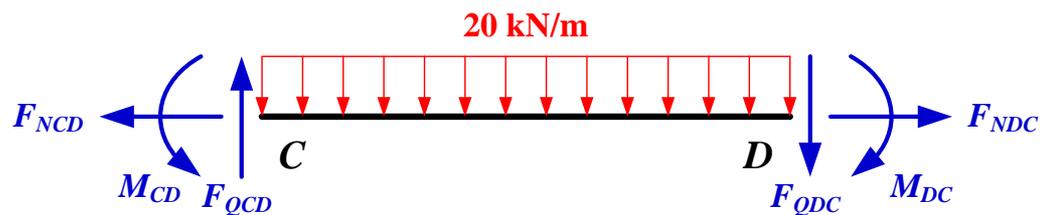
例1：画出图示刚架的内力图



$$M_{CD} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{QCD} = 47 \text{ kN}$$

$$F_{NCD} = -16 \text{ kN}$$



$$M_{DC} = 96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{QDC} = -73 \text{ kN}$$

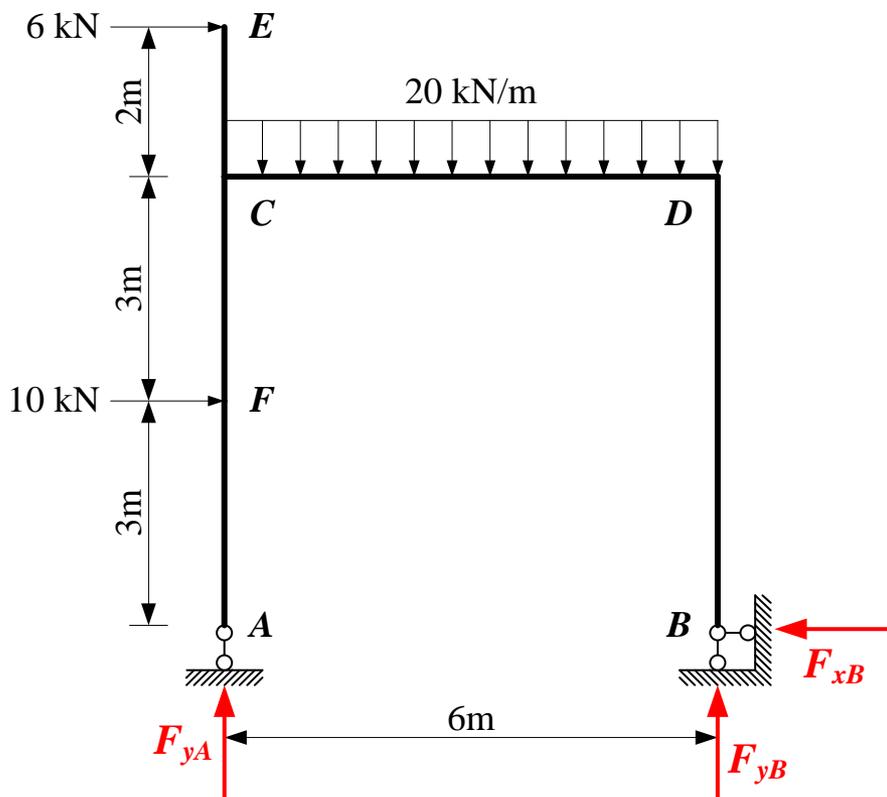
$$F_{NDC} = -16 \text{ kN}$$

以此类推，求其他杆端内力：

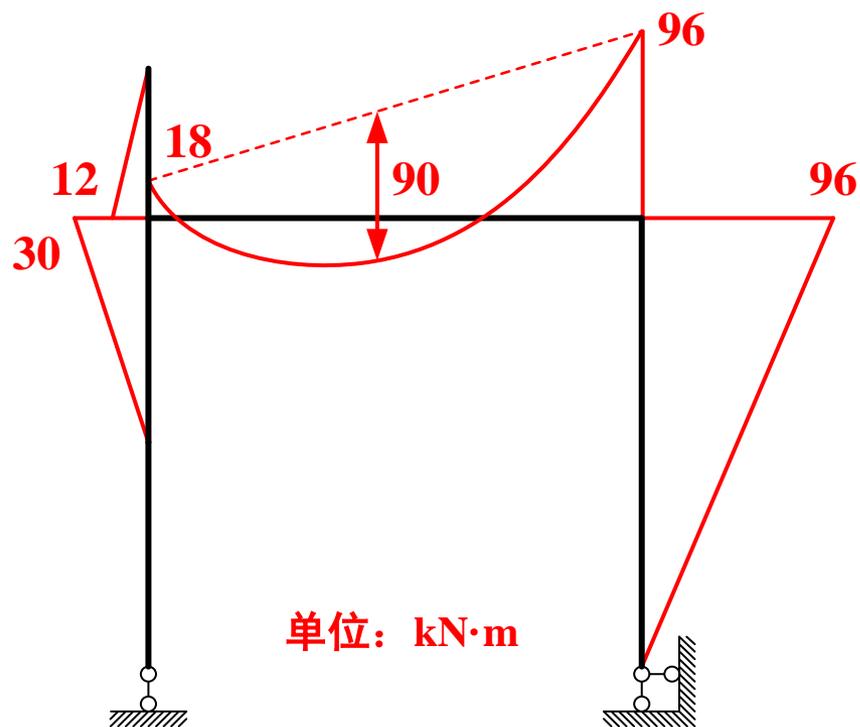
$$M_{DB} = \dots \quad F_{QDB} = \dots \quad F_{NDB} = \dots$$

# 3.4 静定刚架

例1：画出图示刚架的内力图



$M_{CE} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$  - 左侧受拉  
 $M_{CA} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$  - 左侧受拉  
 $M_{CD} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$  - 上部受拉  
 $M_{DC} = 96 \text{ kN} \cdot \text{m}$  - 上部受拉  
 $M_{DB} = 96 \text{ kN} \cdot \text{m}$  - 上部受拉

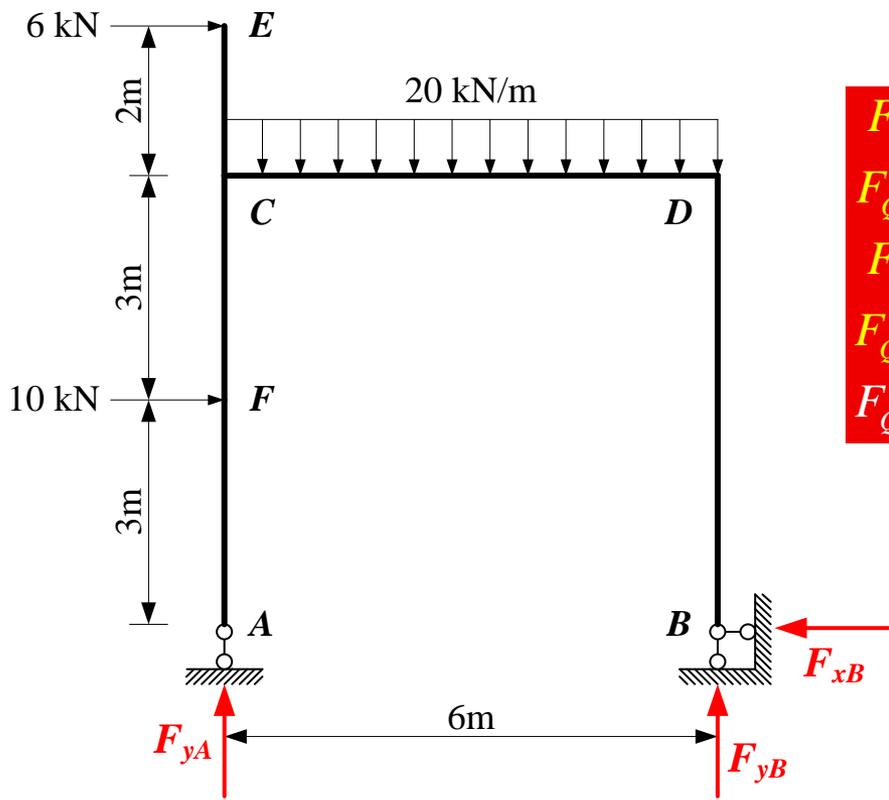


作弯矩图时，将弯矩图绘制在杆件受拉的一侧

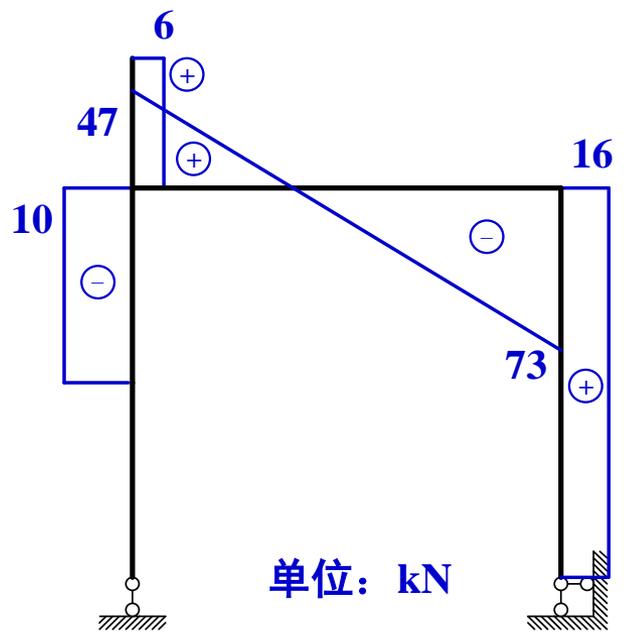
单位：kN·m

# 3.4 静定刚架

例1：画出图示刚架的内力图

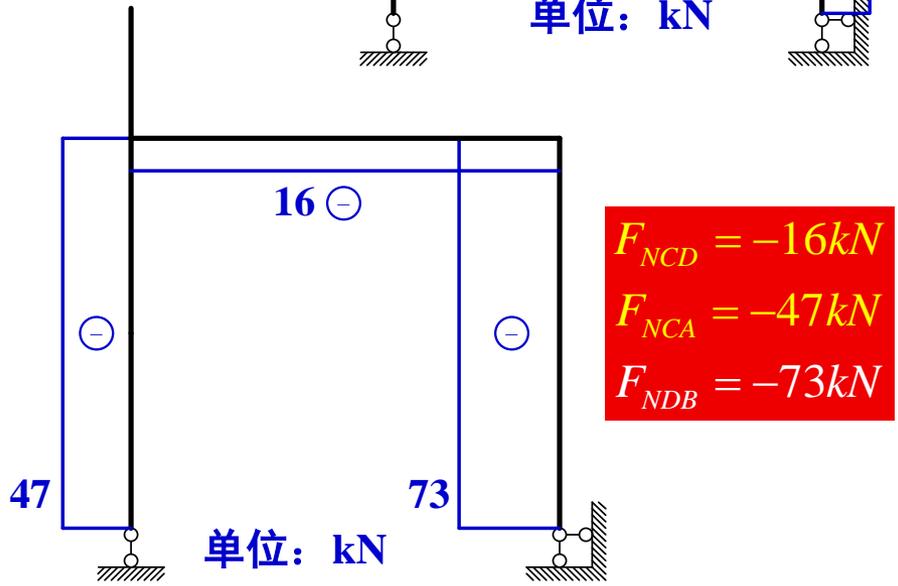


$F_{QCE} = +6kN$   
 $F_{QCA} = -10kN$   
 $F_{QCD} = 47kN$   
 $F_{QDC} = -73kN$   
 $F_{QDB} = +16kN$



单位：kN

剪力图，应逐杆进行，根据已求的杆端剪力即可按照单跨静定梁来画出剪力图，并规定使隔离体顺时针方向转动的剪力为正，剪力图可以绘制在构件任一侧，但须标明正负号。

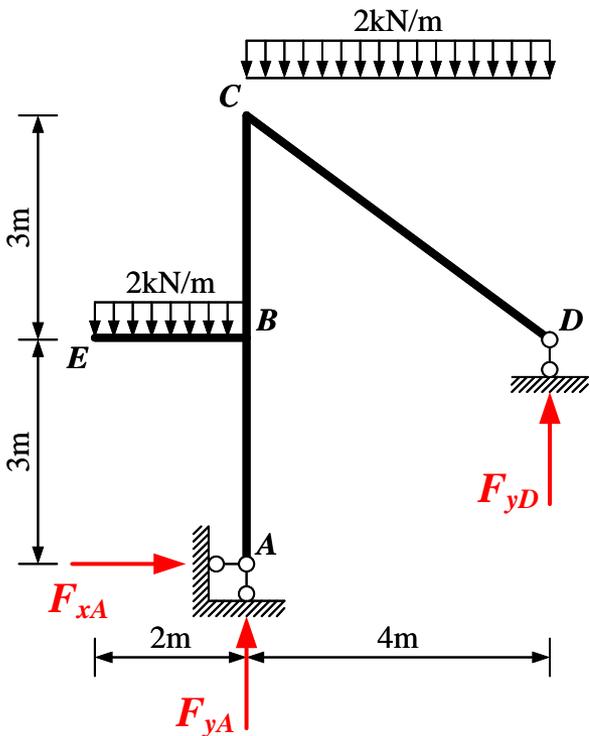


$F_{NCD} = -16kN$   
 $F_{NCA} = -47kN$   
 $F_{NDB} = -73kN$

单位：kN

# 3.4 静定刚架

例2：画出图示刚架的弯矩图



各杆端内力的分析与计算

悬臂杆EB

$$M_{BE} = 2\text{kN/m} \times 2\text{m} \times 1\text{m} = 4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{QBE} = -2\text{kN/m} \times 2\text{m} = -4\text{kN}$$

竖直杆AB

$$F_{NAB} = F_{NBA} = -F_{yA} = -9\text{kN}$$

竖直杆BC

$$F_{NBC} = F_{NCB} = F_{NBA} + 2\text{kN/m} \times 2\text{m} = -5\text{kN}$$

$$M_{BC} = M_{BE} = 4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = M_{BC} = 4\text{kN} \cdot \text{m}$$

支座反力

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum M_D = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_{xA} = 0\text{kN} \\ F_{yA} = 9\text{kN} \\ F_{yD} = 3\text{kN} \end{cases}$$

斜杆CD

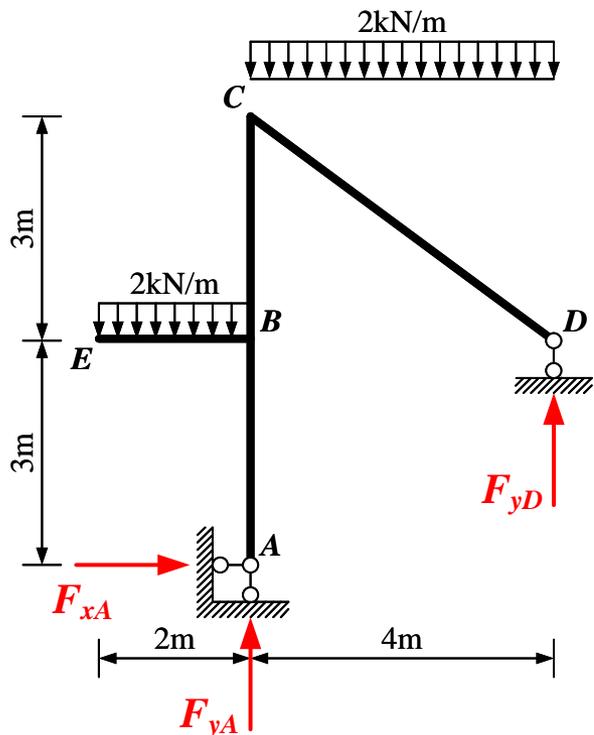
$$M_{CD} = M_{CB} = 4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{QCD} = \dots\dots$$

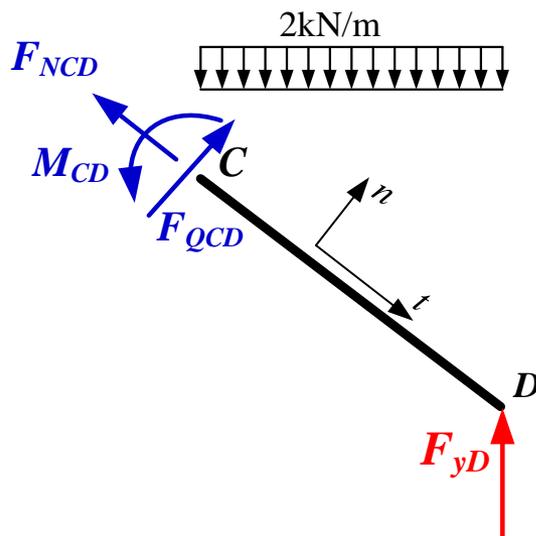
$$F_{NCD} = \dots\dots$$

# 3.4 静定刚架

例2：画出图示刚架的弯矩图



斜杆CD内力的分析与计算



$$F_{QDC} = -F_{yD} \cos \alpha = -2.4 \text{ kN}$$

$$F_{NDC} = -F_{yD} \sin \alpha = -1.8 \text{ kN}$$

$$F_{QCD} = 3 \text{ kN}$$

$$F_{NCD} = 4 \text{ kN}$$

支座反力

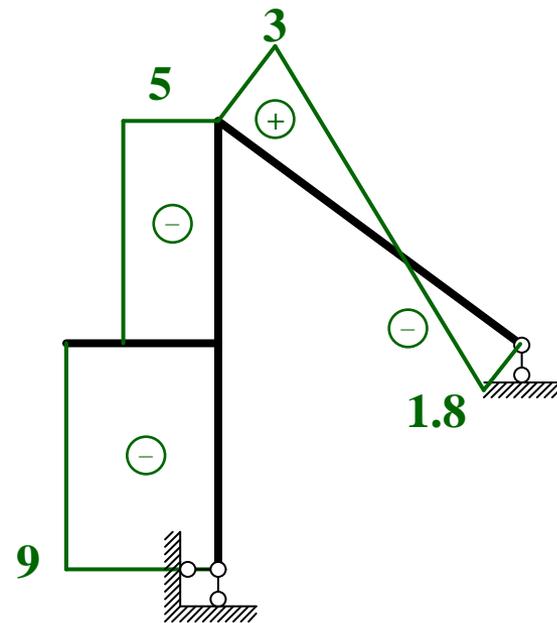
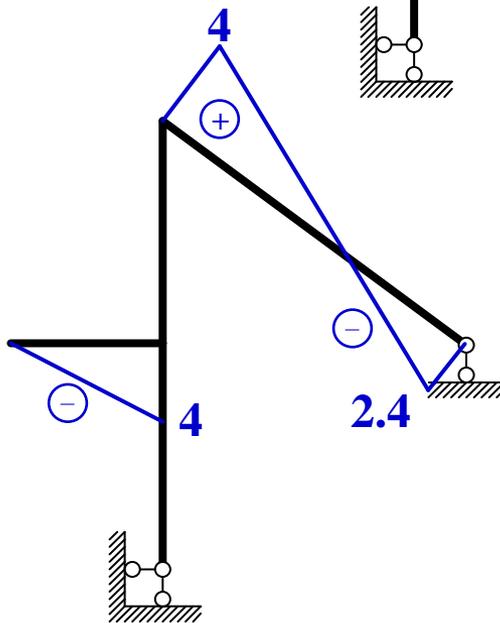
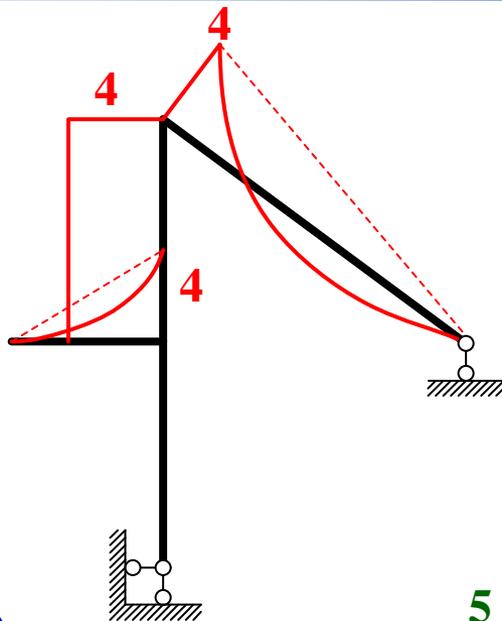
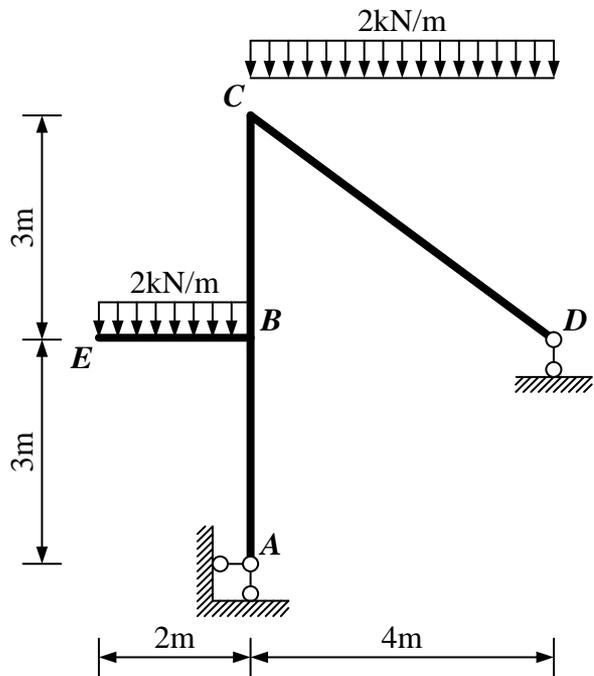
$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum M_D = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_{xA} = 0 \text{ kN} \\ F_{yA} = 9 \text{ kN} \\ F_{yD} = 3 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum F_t = 0 \Rightarrow F_{NCD} + F_{yD} \sin \alpha - 2 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow F_{QCD} + F_{yD} \cos \alpha - 2 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} \cdot \cos \alpha = 0$$

# 3.4 静定刚架

例2：画出图示刚架的弯矩图



# 3.4 静定刚架

## 快速绘制弯矩图

关键点

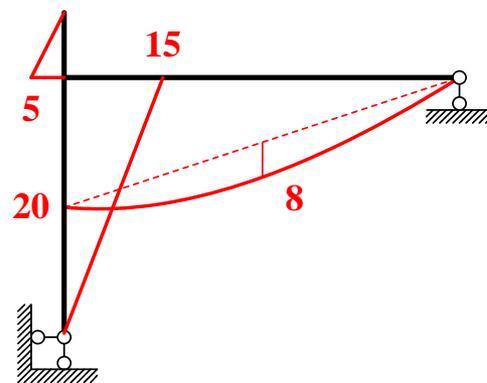
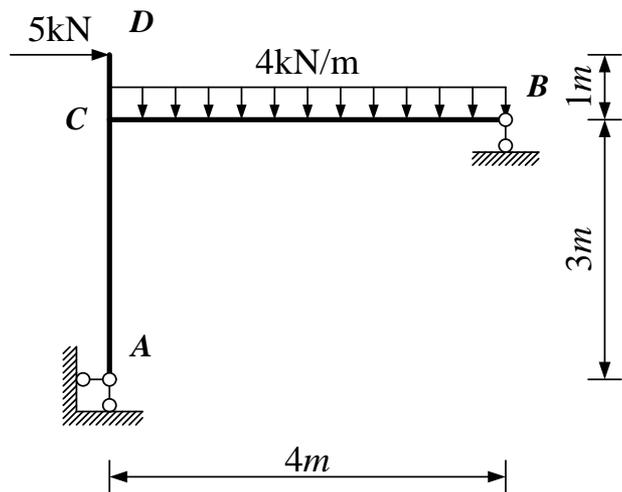
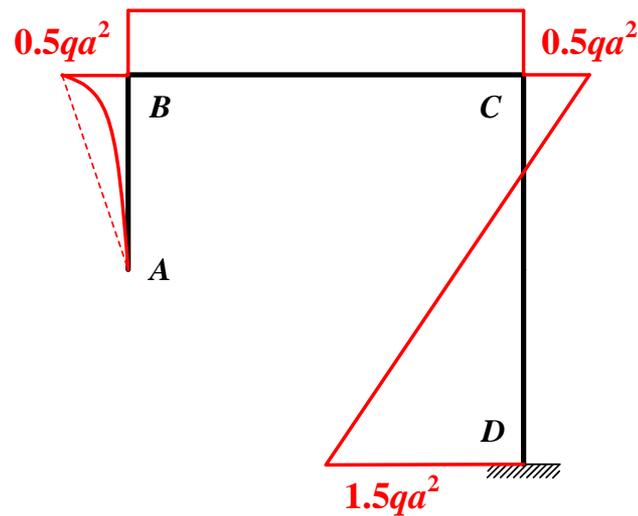
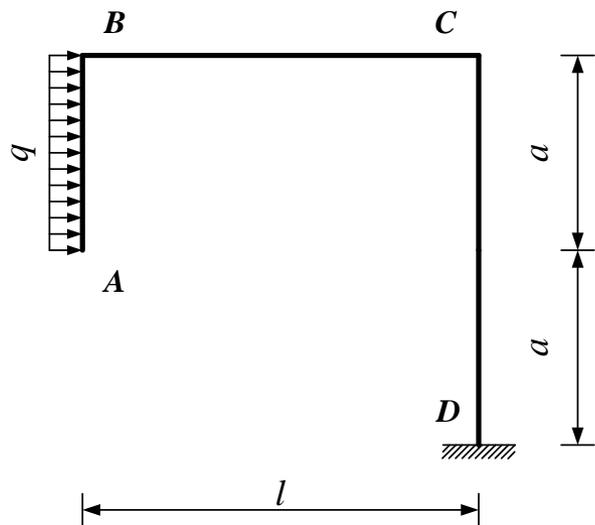
- 隔离体（整体、局部乃至一个结点）平衡法
- 弯矩与荷载间的微分关系和增量关系及其在弯矩图上的反映
- 弯矩图分段叠加法

技巧

- 对症下药
  - 悬臂式
  - 简支式
  - 三铰式
  - 复合式（基本部分和附属部分）
- 先易后难
- 先定性后定量
- 利用对称性

# 3.4 静定刚架

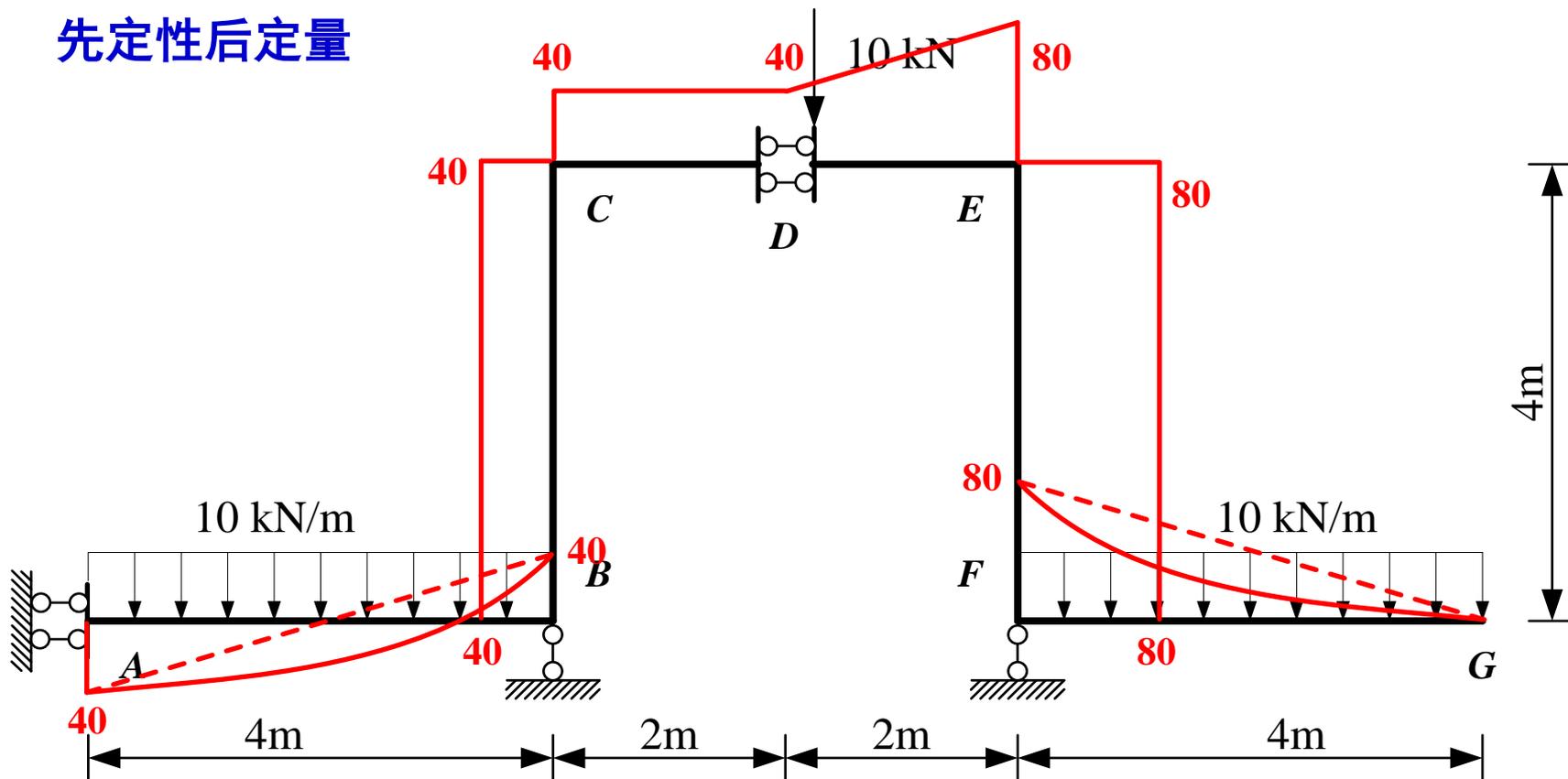
## 快速绘制弯矩图



# 3.4 静定刚架

## 快速绘制弯矩图

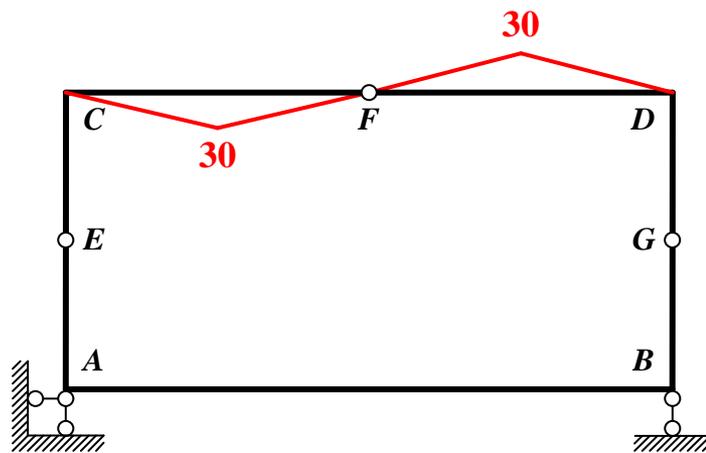
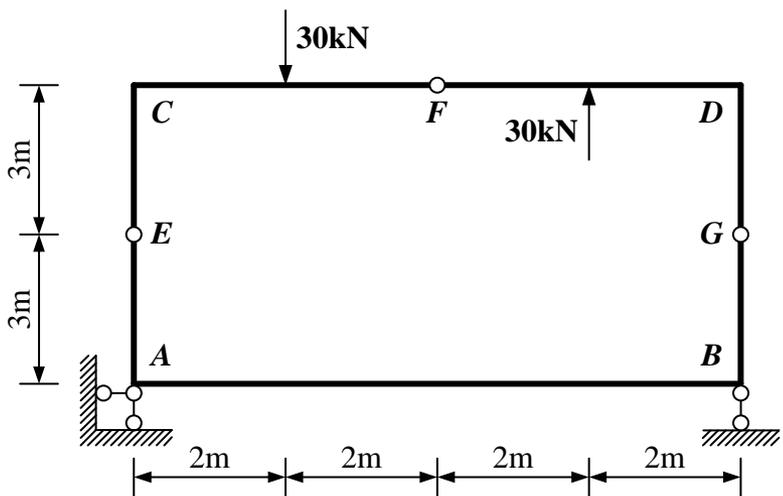
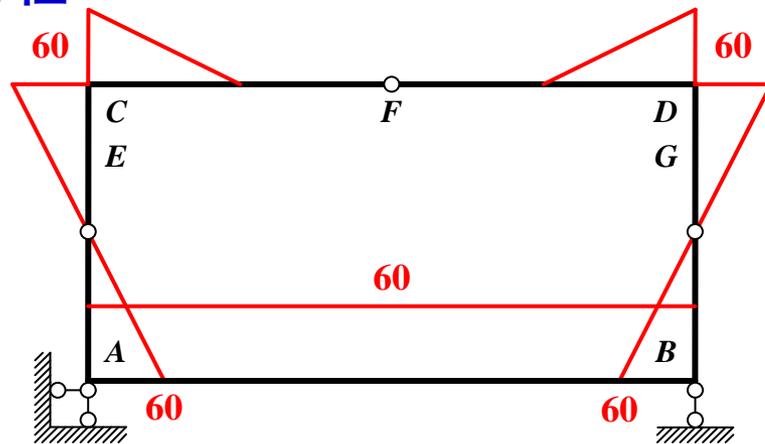
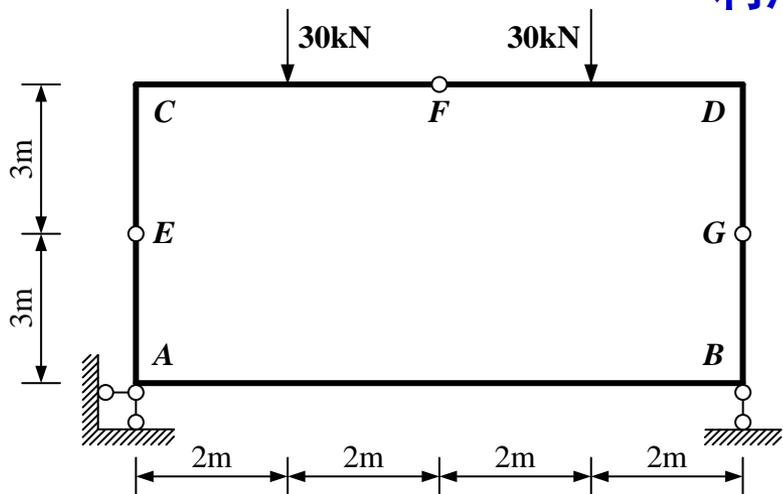
先定性后定量



# 3.4 静定刚架

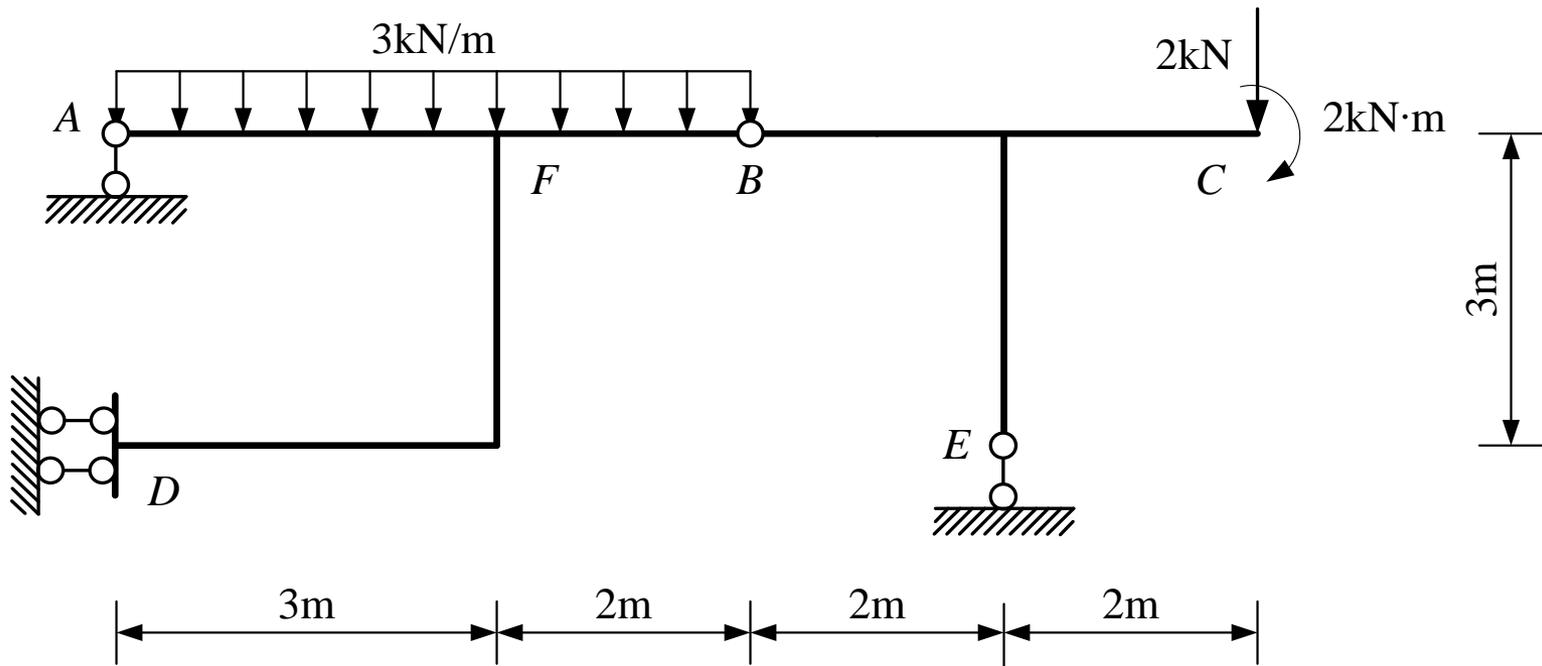
## 快速绘制弯矩图

利用对称性



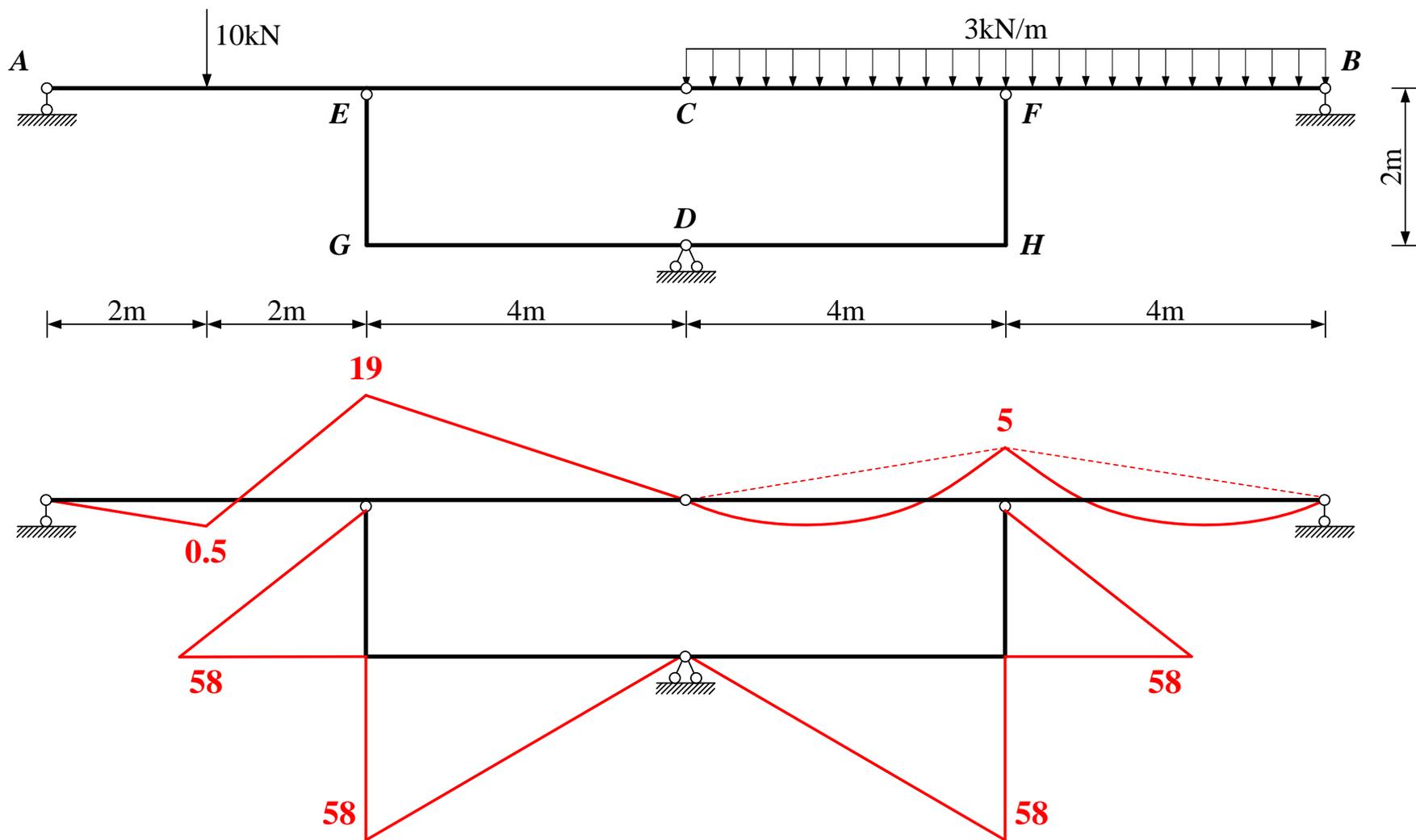
# 3.4 静定刚架

## 快速绘制弯矩图



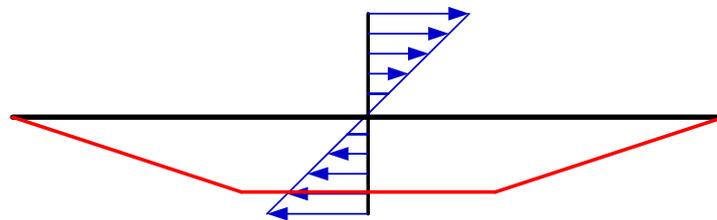
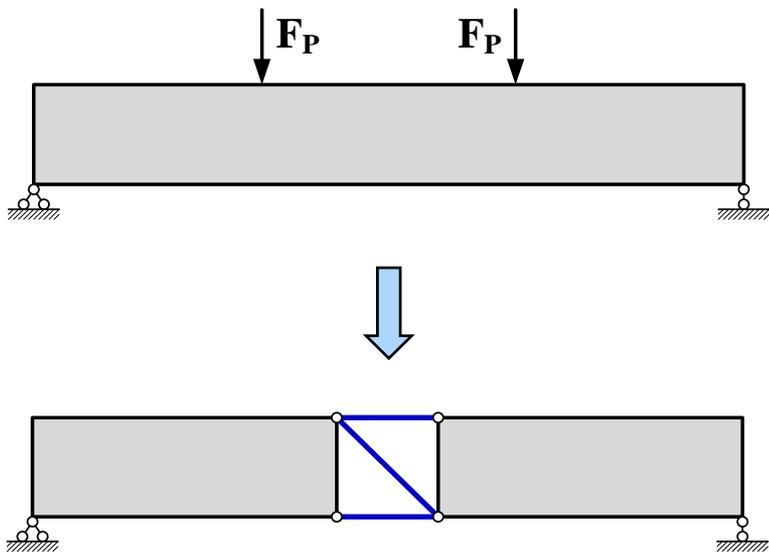
# 3.4 静定刚架

## 快速绘制弯矩图

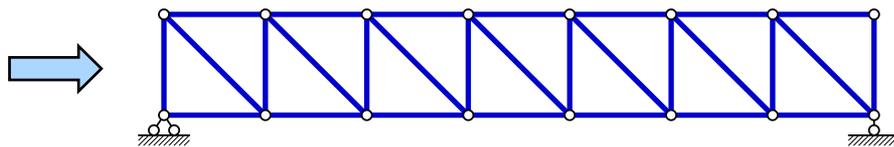


# 3.5 静定桁架

## 桁架的特点



由材料力学可知，受弯实心梁其截面应力分布不均匀，因此材料的强度不能充分发挥。



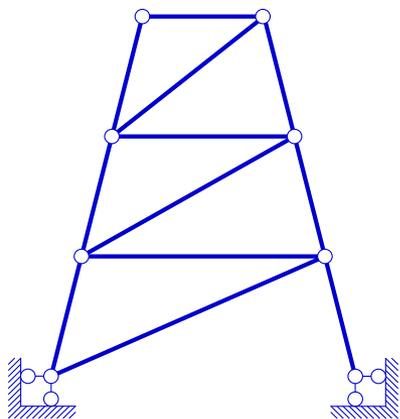
图示结构杆件全部都是二力杆，结点是铰连接，结构是静定的，称为：静定平面桁架。

由材料力学可知，在轴心受拉或受压杆件中，二力杆截面上应力分布均匀，此时材料的效用可以得到充分发挥，所以与梁和刚架相比，桁架的材料应用较为经济，自重较轻，并能够跨越更大的跨度。

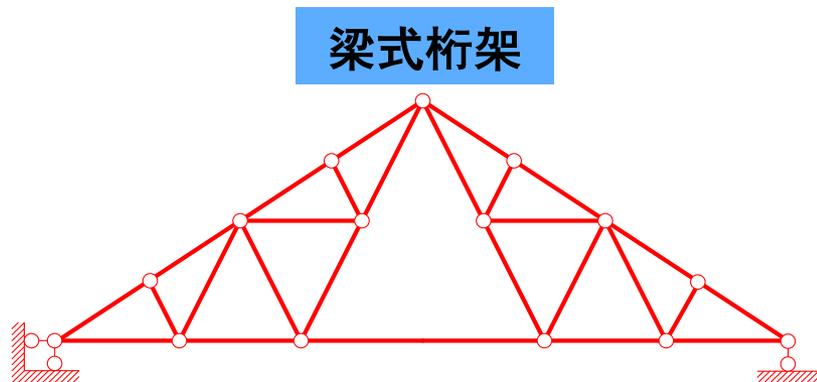
所有结点都是理想铰接点；  
各杆轴线都是直线并通过铰的中心；  
荷载与支座反力都作用在结点上。

# 3.5 静定桁架

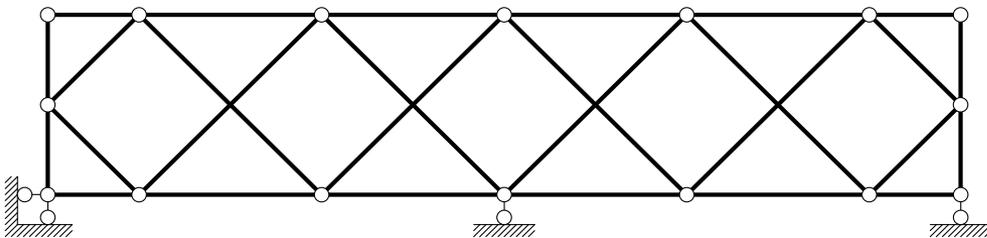
## 桁架的分类



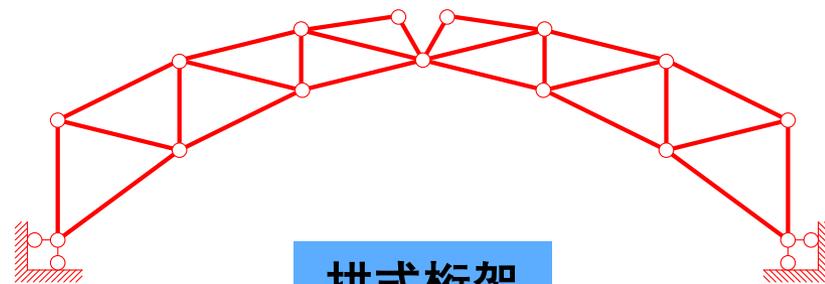
简单桁架



联合桁架



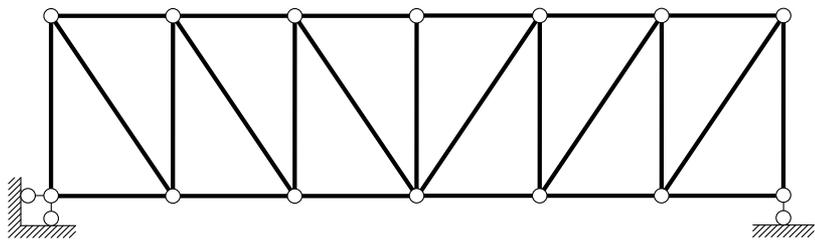
复杂桁架



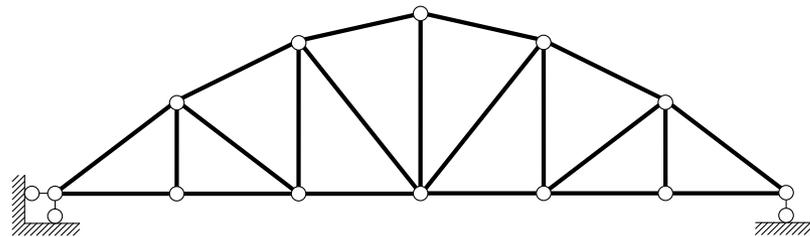
拱式桁架

# 3.5 静定桁架

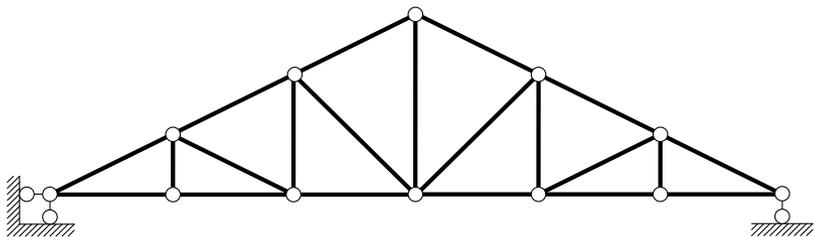
## 桁架的分类



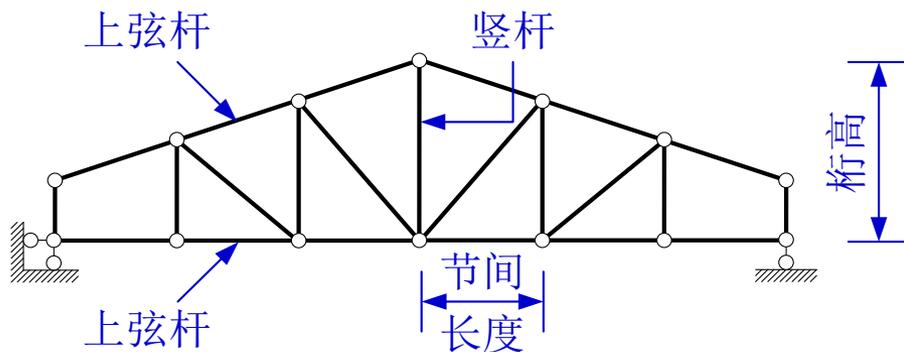
平行弦桁架



折弦桁架



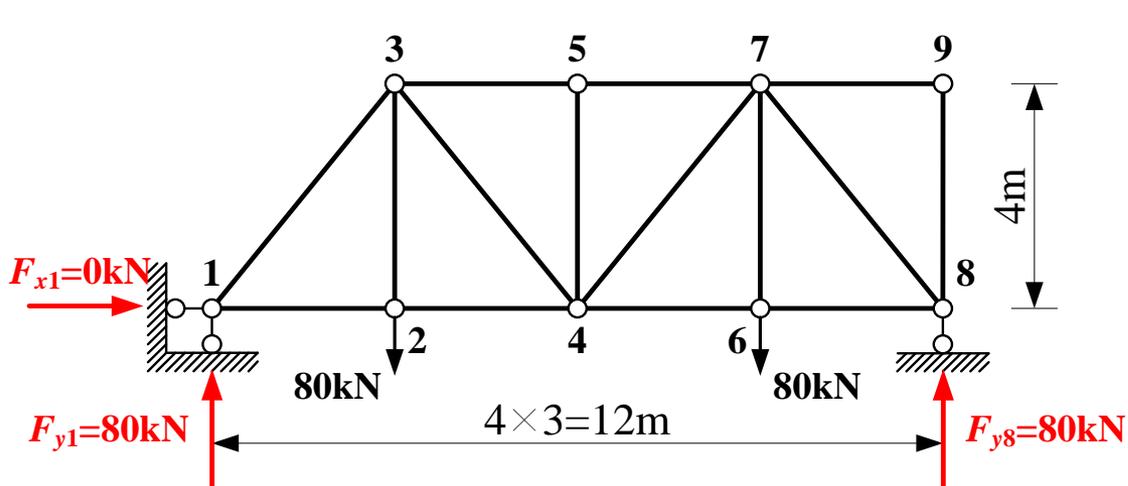
三角形桁架



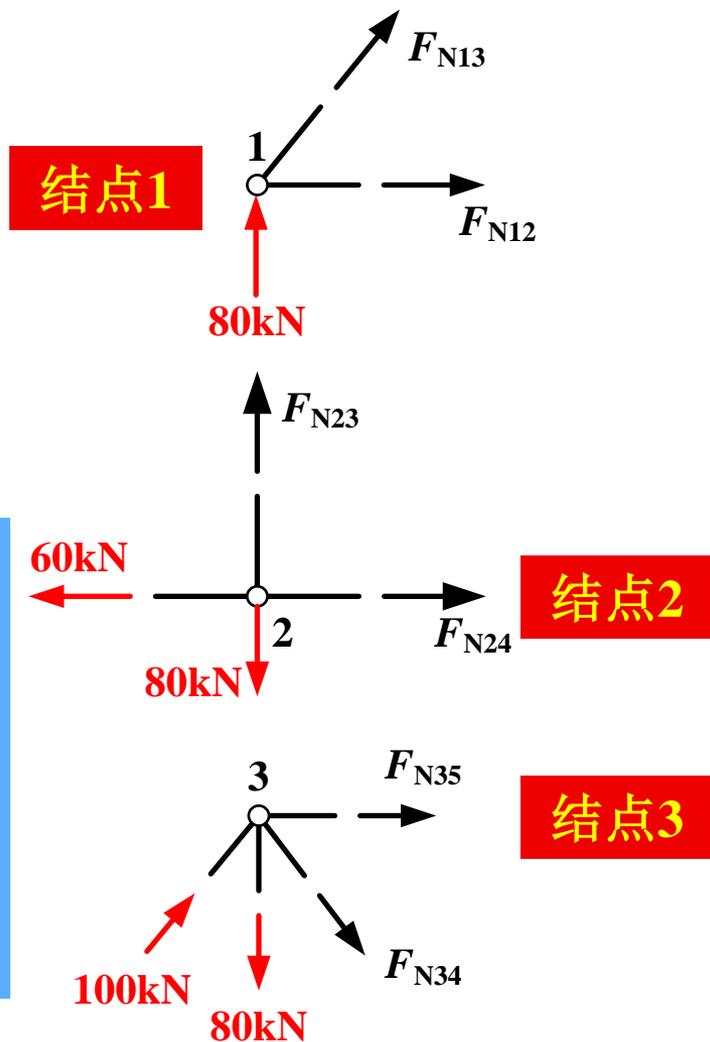
梯形桁架

# 3.5 静定桁架

## 结点法 - 截取桁架结点为隔离体求解桁架杆件内力的方法



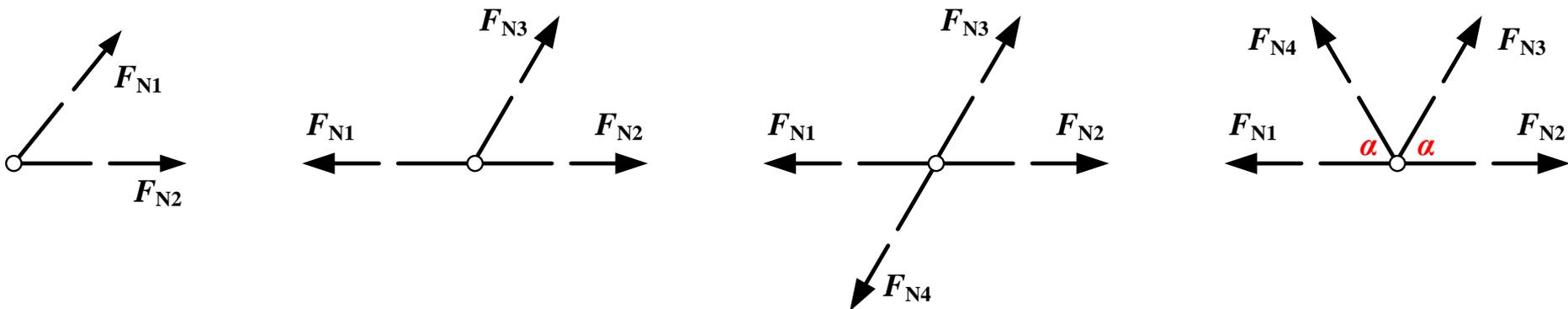
平面桁架任意一结点的各力（包括荷载、支座反力和杆件轴力）组成平面汇交力系，就每个结点可以列出2个平衡方程，对于有n个结点的平面桁架可以列出 $2n$ 个平衡方程，其数量正好等于静定平面桁架的链杆（包括支座链杆）约束数目。因此联立求解上述 $2n$ 个平衡方程，就可以求得桁架所有杆件的轴力和支座反力。但**为了避免解联立方程，通常从未知力不超过2个的结点开始。**



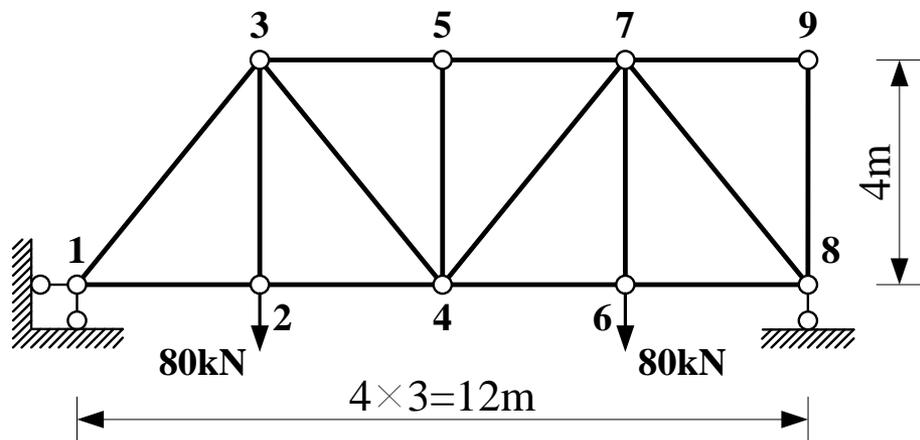
# 3.5 静定桁架

## 结点法 - 截取桁架结点为隔离体

利用结点平衡的某些特殊情况，可以判断桁架中某些杆件的轴力为零，称为零杆；或者可以判定与某一结点相联的两杆内力数值相等，从而使计算得以简化。

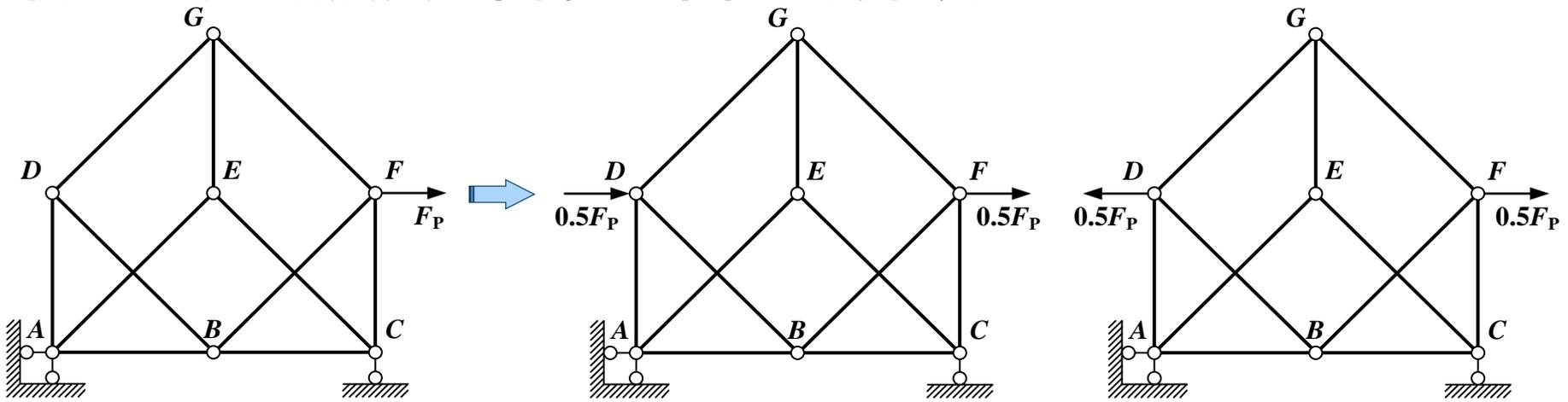


如果桁架在对称荷载或反对称荷载作用下，在分析时只需要计算半边桁架杆件的内力，另外半边杆件的内力可以根据对称或反对称的性质得到。因此利用受力状态对称或反对称的特点可以使计算进一步简化。



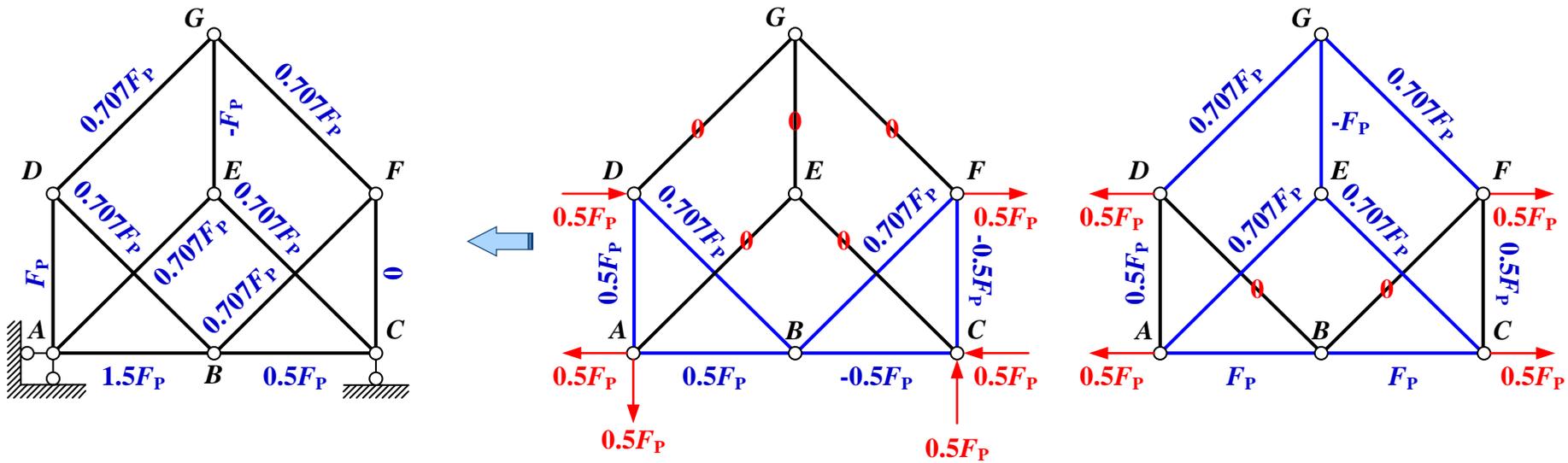
# 3.5 静定桁架

例1：试用结点法求图示桁架各杆的轴力



反对称结构

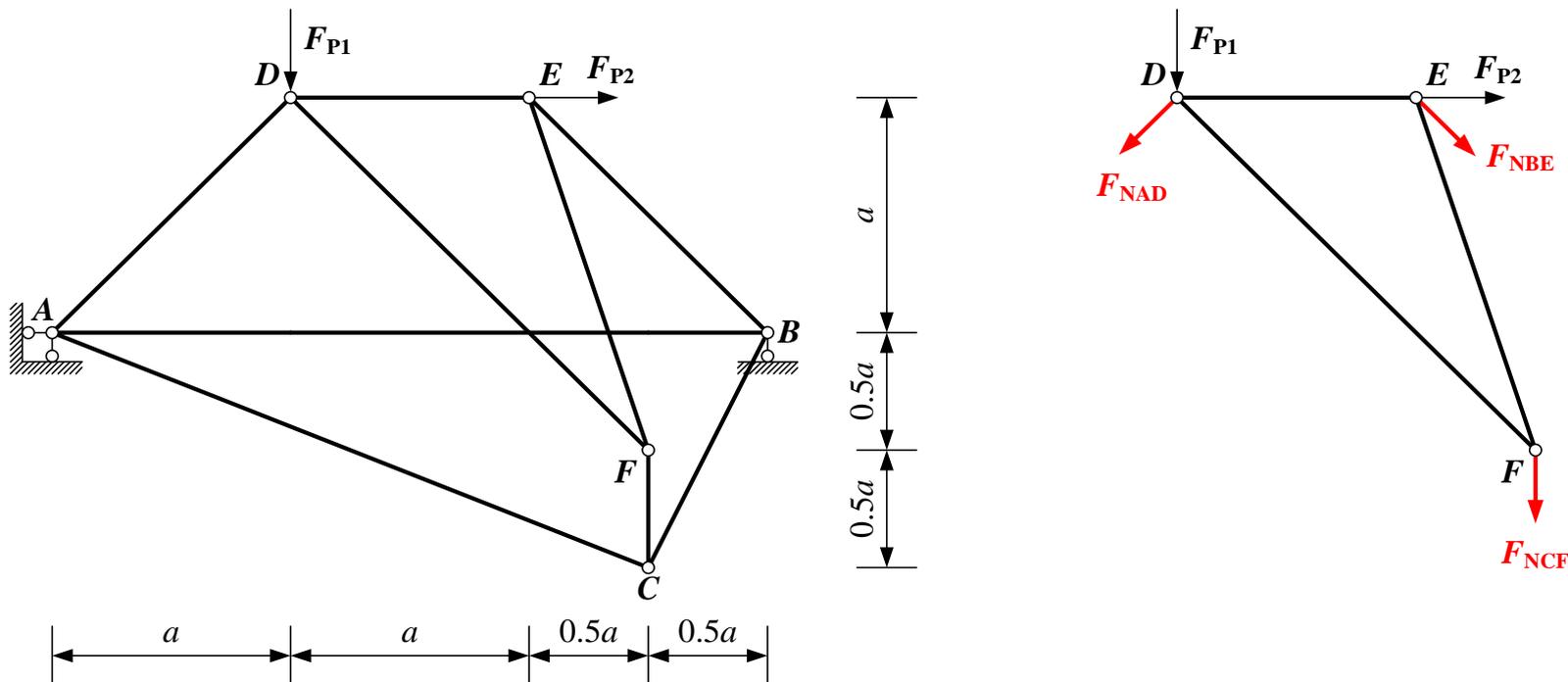
对称结构



# 3.5 静定桁架

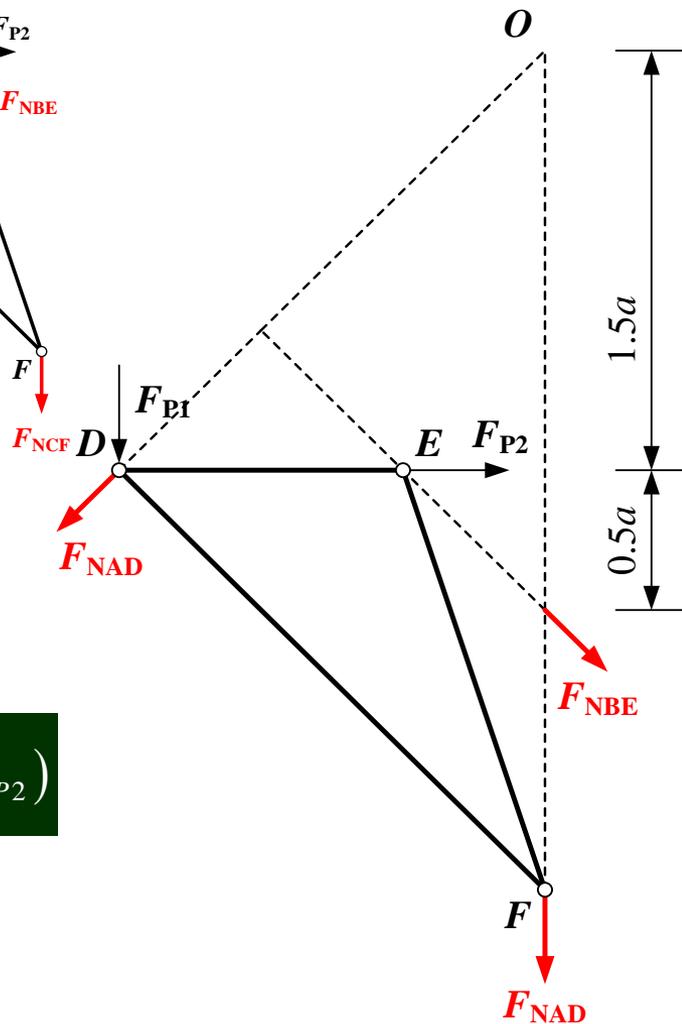
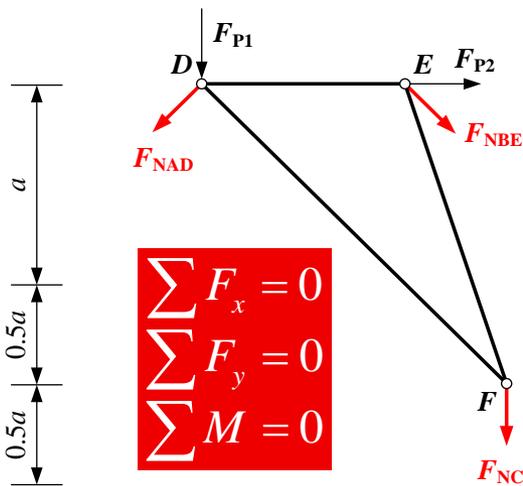
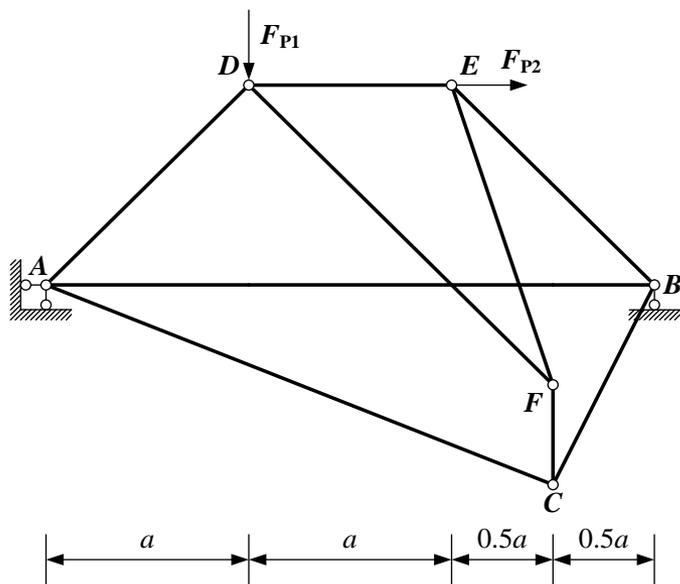
## 截面法 - 用截面截取桁架中包含两个以上结点的部分为隔离体

在桁架分析中，有时仅需或者事先需求出某一（或某些）指定杆件的内力，这时一般用截面法比较方便。截面法是用适当的截面截取桁架中包含两个以上结点的部分为隔离体。作用在隔离体上的各力构成平面一般力系，可以建立三个平衡方程，只要隔离体上的未知力不超过三个，一般都可以用这三个平衡方程解得。



# 3.5 静定桁架

截面法 - 用截面截取桁架中包含两个以上结点的部分为隔离体



$$\sum M_O = 0$$

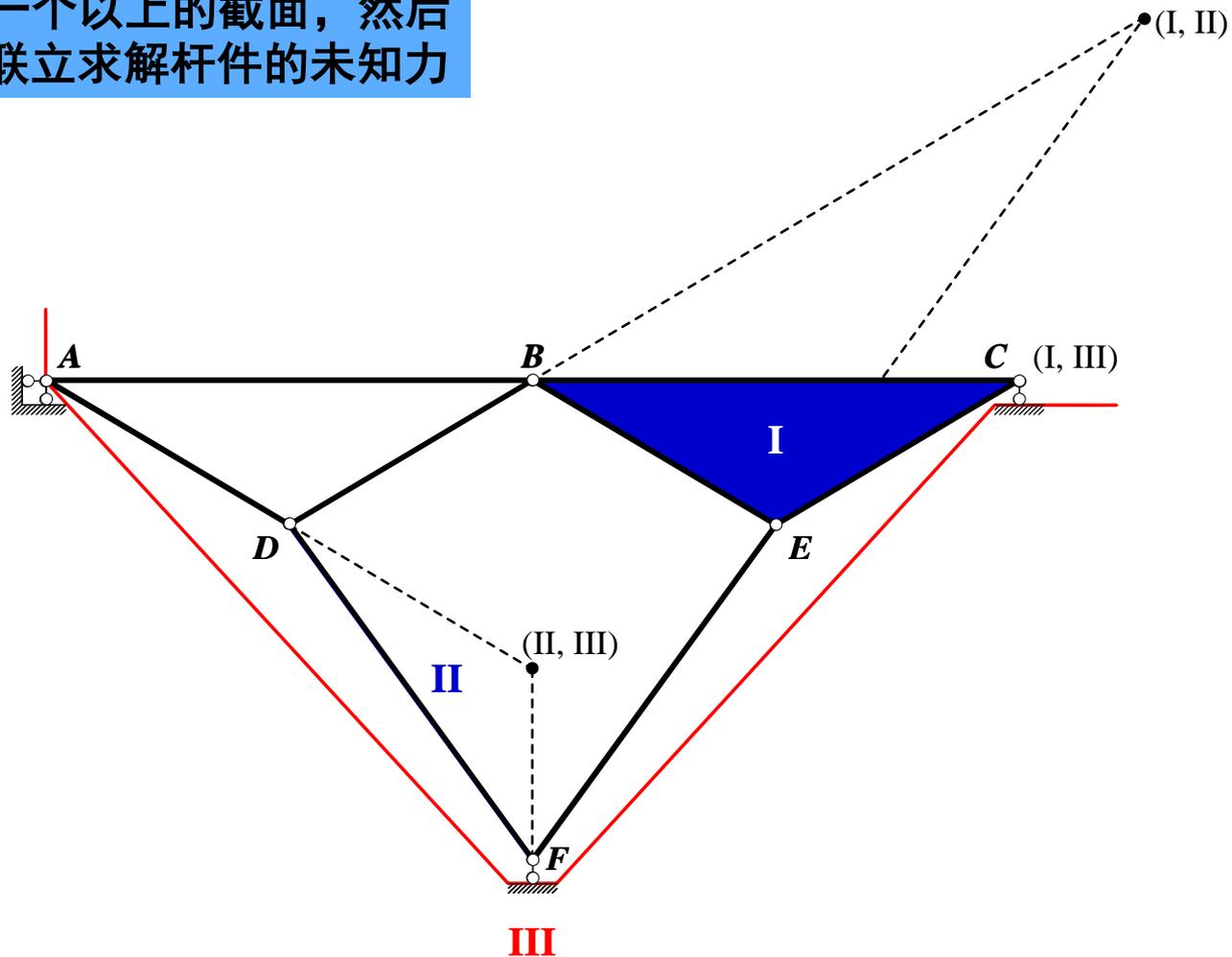
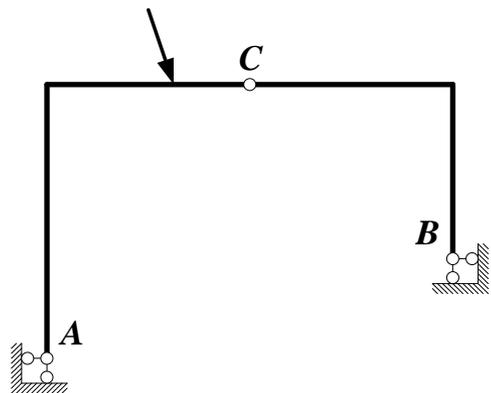
$$F_{P1} \times \frac{3}{2}a + F_{P2} \times \frac{3}{2}a + F_{NEB,x} \times 2a = 0 \Rightarrow F_{NEB,x} = -\frac{3}{4}(F_{P1} + F_{P2})$$

$$F_{NEB} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}(F_{P1} + F_{P2})$$

# 3.5 静定桁架

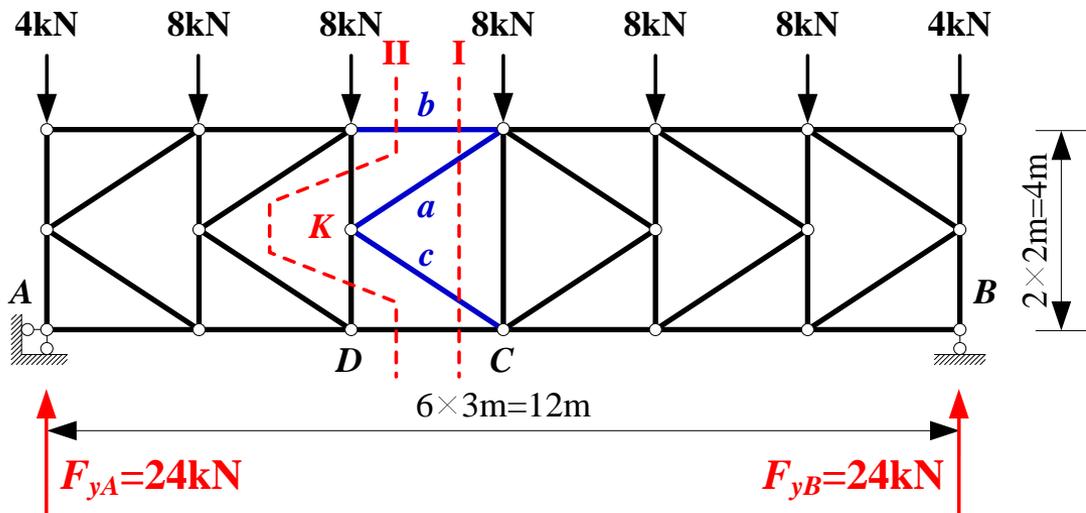
## 截面法

运用截面法有时需要截取一个以上的截面，然后列出不同的隔离体方程，联立求解杆件的未知力



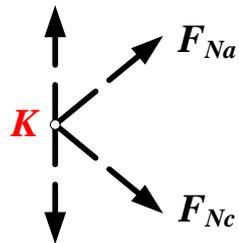
# 3.5 静定桁架

## 截面法和结点法的联合应用



### 支座反力

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_{xA} = 0kN \\ F_{yA} = 24kN \\ F_{yB} = 24kN \end{cases}$$



$$\begin{aligned} F_{Na} &= -F_{Nc} \\ F_{ya} &= -F_{yc} \end{aligned}$$

### 取截面I左边隔离体

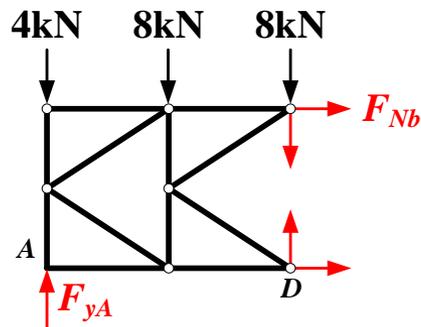
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 24kN - 20kN + 2F_{ya} = 0 \Rightarrow F_{ya} = -2kN$$

### 根据比例关系

$$F_{Na} = -3.61kN \quad F_{Nc} = 3.61kN$$

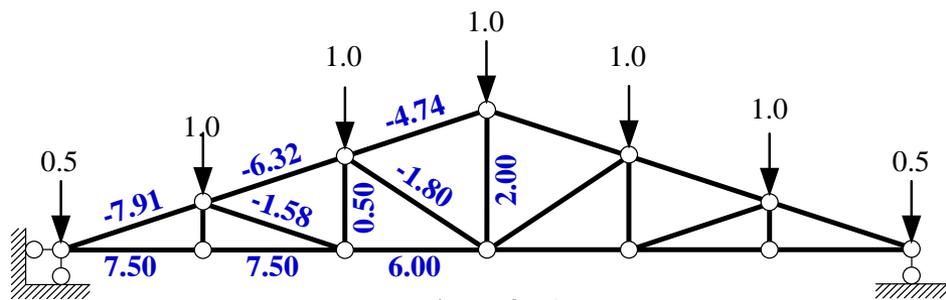
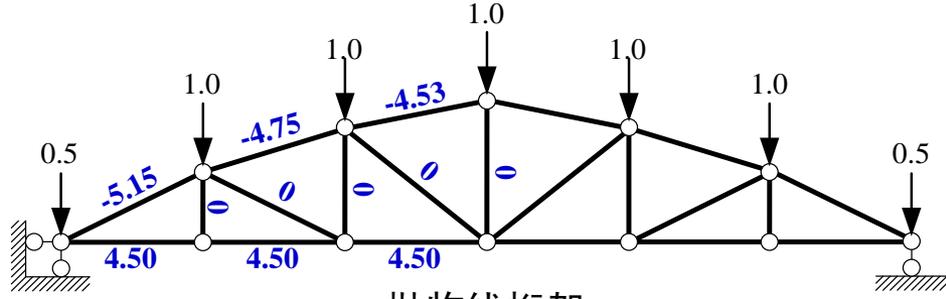
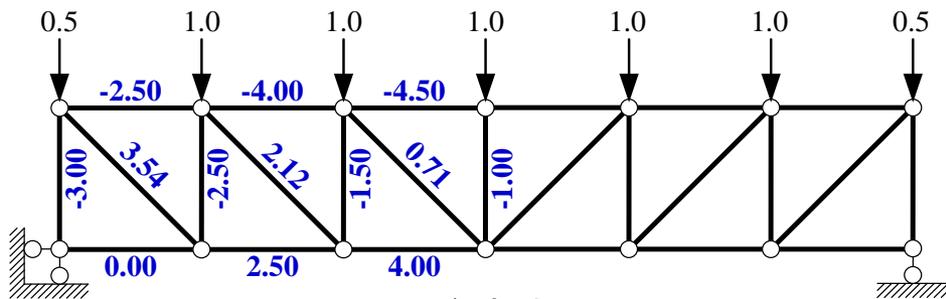
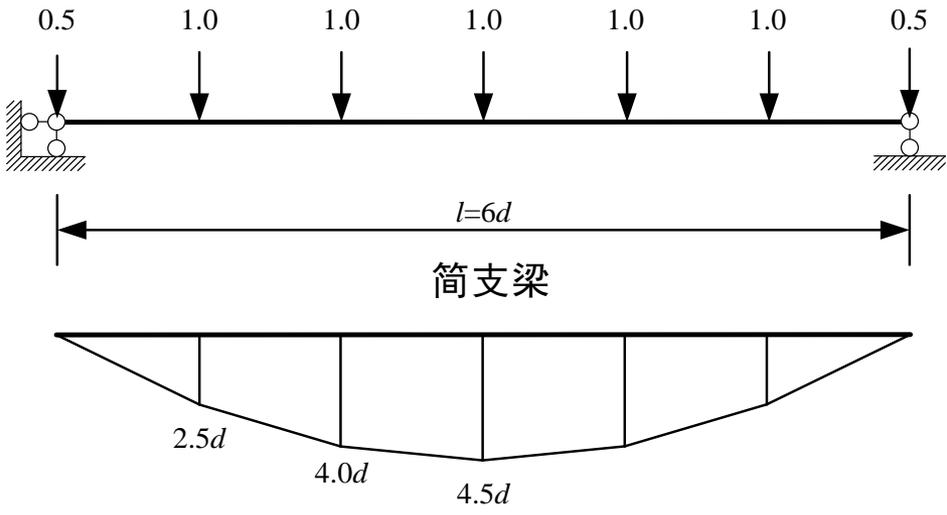
### 取截面II左边隔离体

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 24kN \times 6m - 4kN \times 6m - 8kN \times 3m + F_{Nb} \times 4m = 0 \Rightarrow F_{Nb} = -24kN$$



# 3.5 静定桁架

## 各类梁式桁架的比较



### 不同建筑材料的屋架对应的桁架形式

木屋架	三角形桁架
钢屋架	梯形桁架
砼屋架	折线形桁架 (近似抛物线)

## 3.6 组合结构

组合结构是指由若干链杆和刚架式杆件联合组成的结构，其中链杆只承受轴力，属二力杆；刚架式构件则一般受到弯矩、剪力和轴力的共同作用。组合结构常用于房屋建筑中的屋架、吊车梁以及桥梁等承重结构。由于组合结构中两类杆件受力特点的差异，工程中常采用不同的材料制作已达到经济的目的。



# 3.6 组合结构

分析方法 - 与一般静定结构相同

支座反力

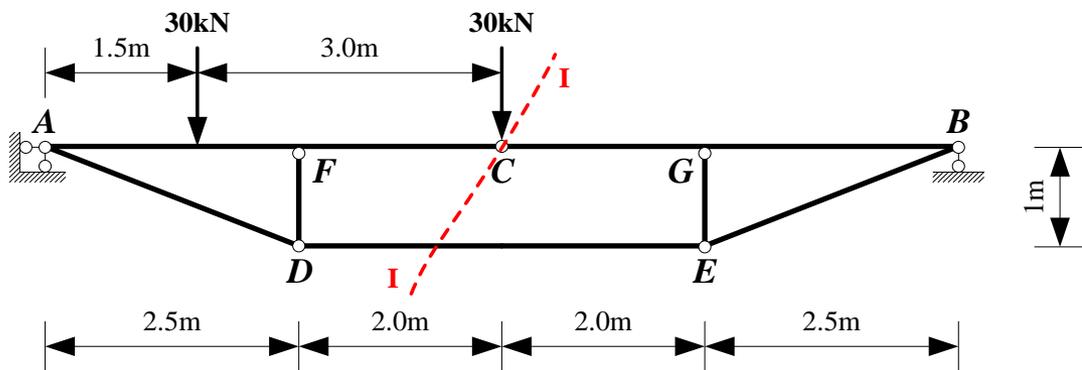


链杆轴力



受弯杆件的内力

分析时应该注意区分  
两类不同性质的杆件



• 支座反力

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_{xA} = 0kN \\ F_{yA} = 40kN \\ F_{yB} = 20kN \end{cases}$$

• 取截面I-I右边隔离体

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 20kN \times 4.5m - F_{NDE} \times 1m = 0 \Rightarrow F_{NDE} = 90kN$$

• 取结点D和结点E作为隔离体

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} F_{NDA} = 96.93kN \\ F_{NDF} = -36kN \\ F_{NEB} = 96.93kN \\ F_{NEG} = -36kN \end{cases}$$

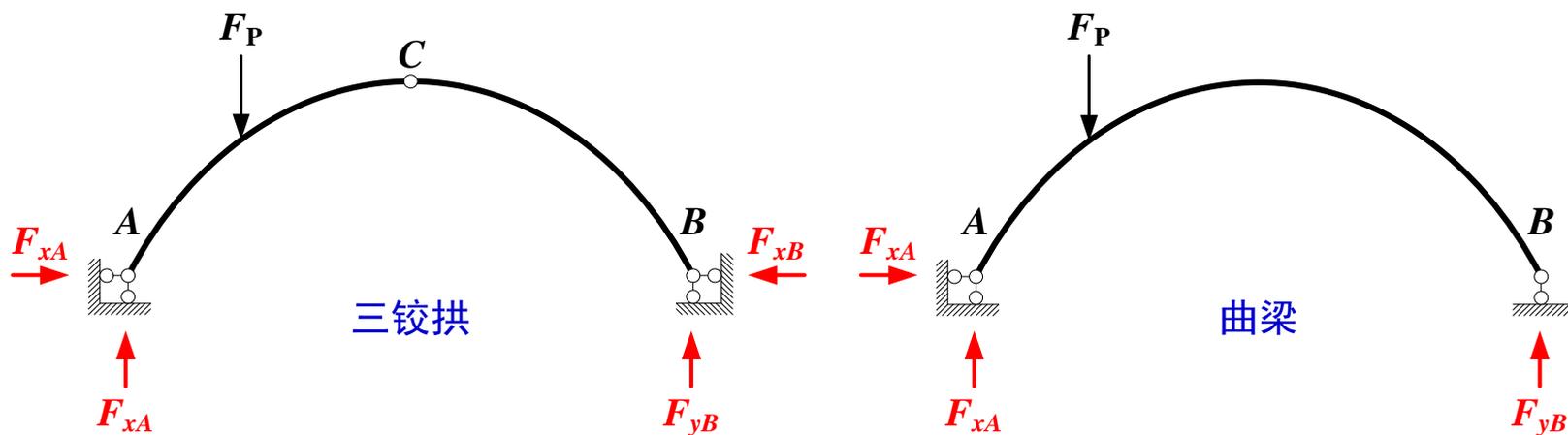
• 确定关键截面F和G的弯矩

$$\begin{aligned} M_F &= F_{yA} \times 2.5m - F_{NDE} \times 1m + 30kN \times 1m = -20kN \cdot m \\ M_G &= F_{yB} \times 2.5m - F_{NDE} \times 1m = -40kN \cdot m \end{aligned}$$

- 结合分段叠加法绘制受弯杆件的弯矩图
- 绘制受弯杆件的剪力和轴力图

# 3.7 三铰拱

## 拱的特征

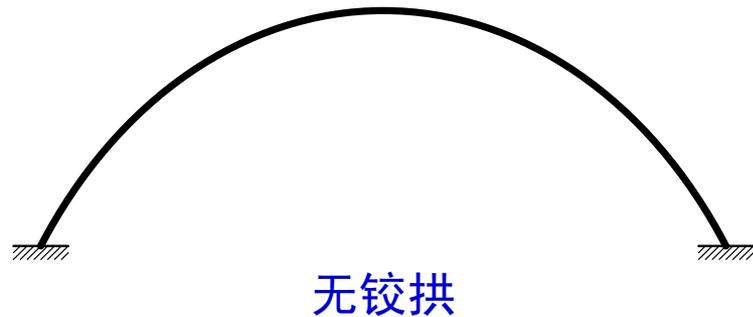
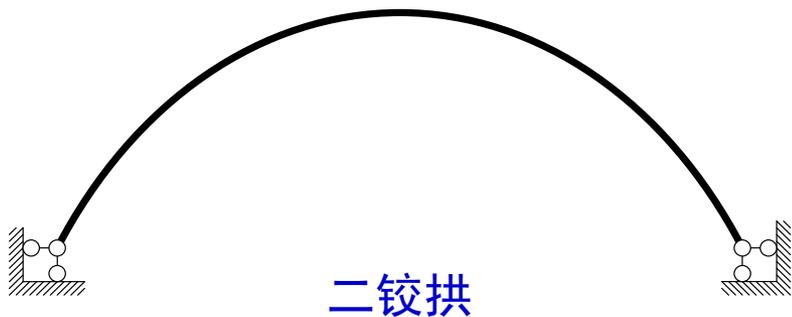
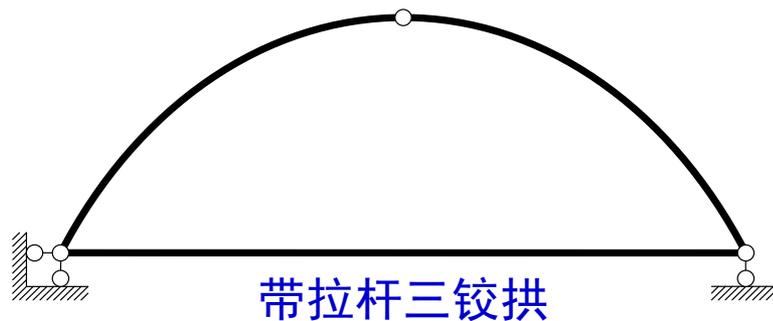
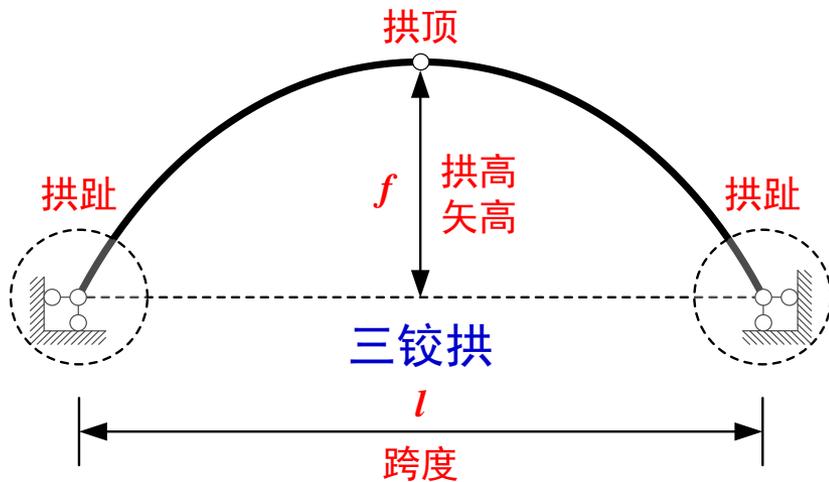


拱的基本静力特征是：在竖向荷载作用下，拱支座将产生水平推力，从而使拱体主要承受轴向压力并且截面弯矩大为减小。

拱式结构的上述静力特征，决定了与梁相比用材节省，自重减轻，并且可有较大的跨度。由于拱体主要承受轴向压力，故可利用砖、石、混凝土等抗压性能好而又相对廉价的材料建造，从建筑学的角度，拱式结构有利于营造曲线美，并能提供较大的净空使用高度。拱式结构的缺点是需要支座提供较大的水平推力。工程上也采用连续拱的形式，使中间支座两边的水平推力相互抵消。拱的外形较复杂，跨度常较大，施工相对困难一些。

# 3.7 三铰拱

## 拱的形式

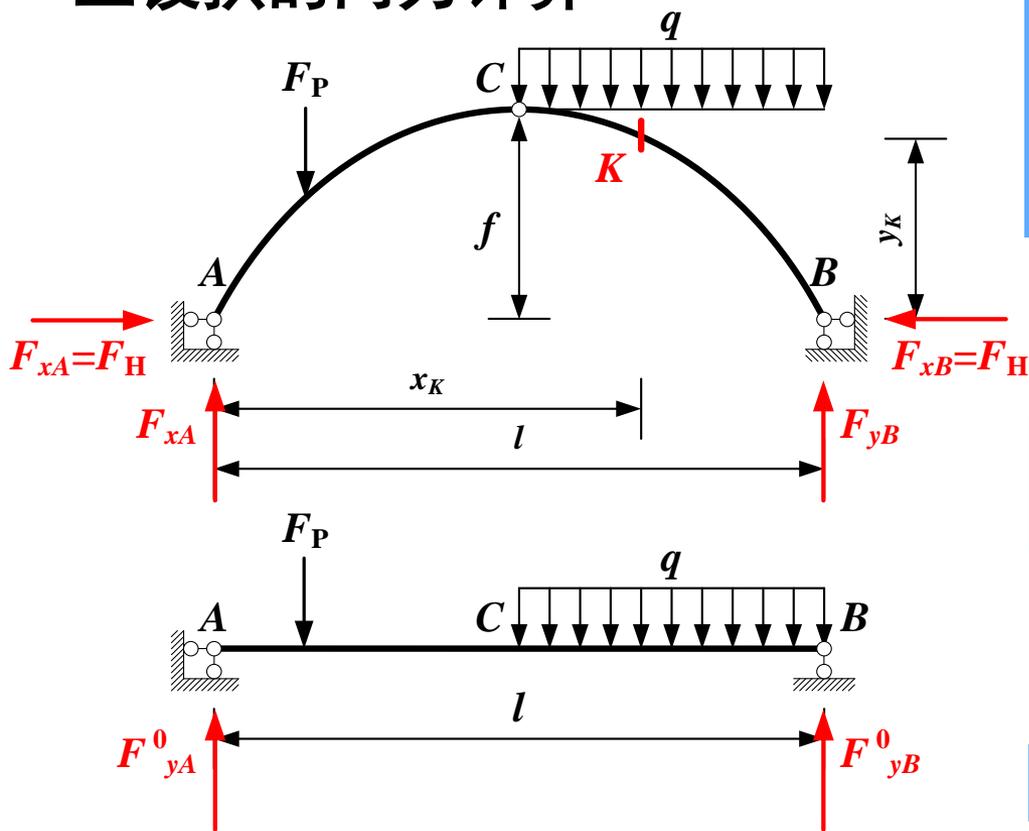


静定结构

超静定结构

# 3.7 三铰拱

## 三铰拱的内力计算



三铰拱的支座反力：三铰拱共有4个支座反力，可以利用三个整体平衡方程再加上顶铰处弯矩为零的条件，即顶铰一侧隔离体力矩平衡方程唯一确定。

$$F_{yA} = F_{yA}^0 \quad F_{yB} = F_{yB}^0$$

三铰拱支座竖向反力的计算与相应简支梁支座竖向反力的计算完全相同。

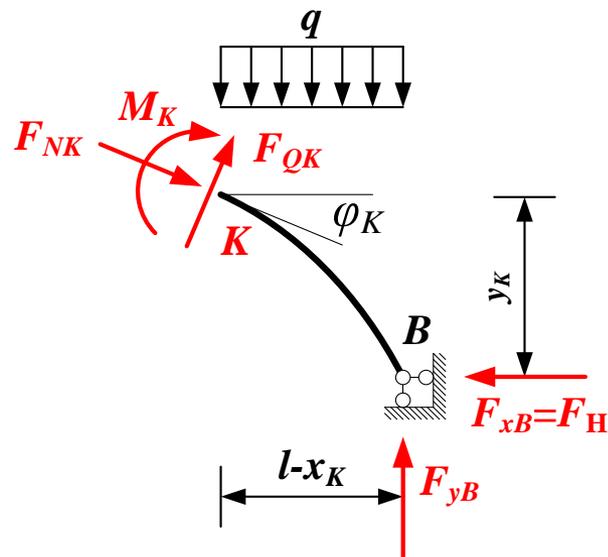
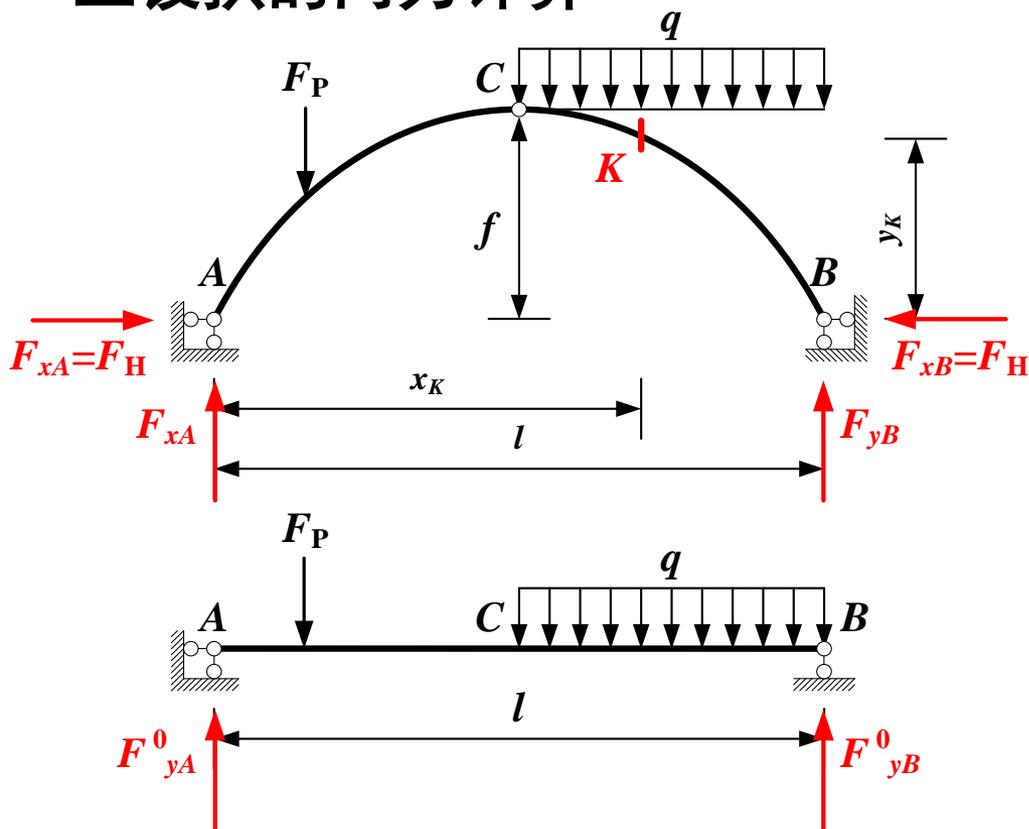
$$M_C^0 - F_H f = 0 \rightarrow F_H = M_C^0 / f$$

三铰平拱在竖向荷载作用下支座水平力

在给定荷载作用下，三铰拱支座反力仅与三个铰的位置相关有关，与拱轴的形状无关；在竖向荷载作用下，三铰平拱的支座反力与相应简支梁反力相同，而水平推力与拱高成反比。拱的高跨比愈大水平推力愈小，反之，则水平推力愈大。

# 3.7 三铰拱

## 三铰拱的内力计算



$$M_K = F_{yB}(l - x_K) - \frac{1}{2}q(l - x_K)^2 - F_H y_K$$

$$F_{QK} = [F_{yB} - q(l - x_K)] \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K$$

$$F_{NK} = -[F_{yB} - q(l - x_K)] \sin \varphi_K - F_H \cos \varphi_K$$

拱计算中轴力取受压为正；而弯矩是以使拱体的内侧受拉为正。在计算K截面的轴力和剪力时，可将B支座反力和作用于隔离体上的外荷载沿K点拱轴线的切线和法线方向进行分解，再分别由这两个方向上力的平衡条件求得截面上的轴力和剪力

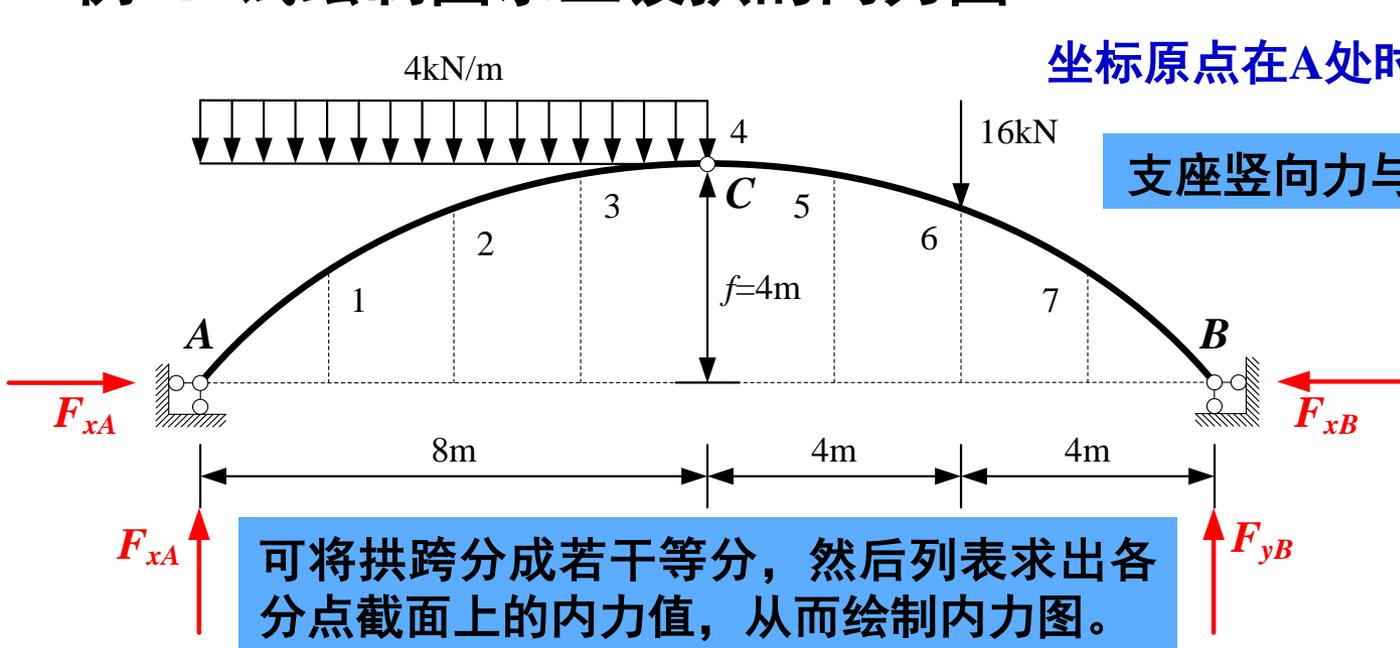
$$M_K = M_K^0 - F_H y_K$$

$$F_{QK} = F_{QK}^0 \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K$$

$$F_{NK} = F_{NK}^0 \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K$$

# 3.7 三铰拱

例1：试绘制图示三铰拱的内力图



坐标原点在A处时拱轴线:  $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$

支座竖向力与相应简支梁反力相同

$$F_{yA} = F_{yA}^0 = 28kN$$

$$F_{yB} = F_{yB}^0 = 20kN$$

支座处水平推力

$$F_H = \frac{M^0}{f} = 24kN$$

分点  
2

$$y_2 = \frac{4f}{l^2} x_2(l-x_2) = 3m$$

$$\tan \varphi_2 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_2} = \frac{4f}{l^2} (l-2x_2) = 0.5$$

$$M_2 = M_2^0 - F_H y_2 = 8kN \cdot m$$

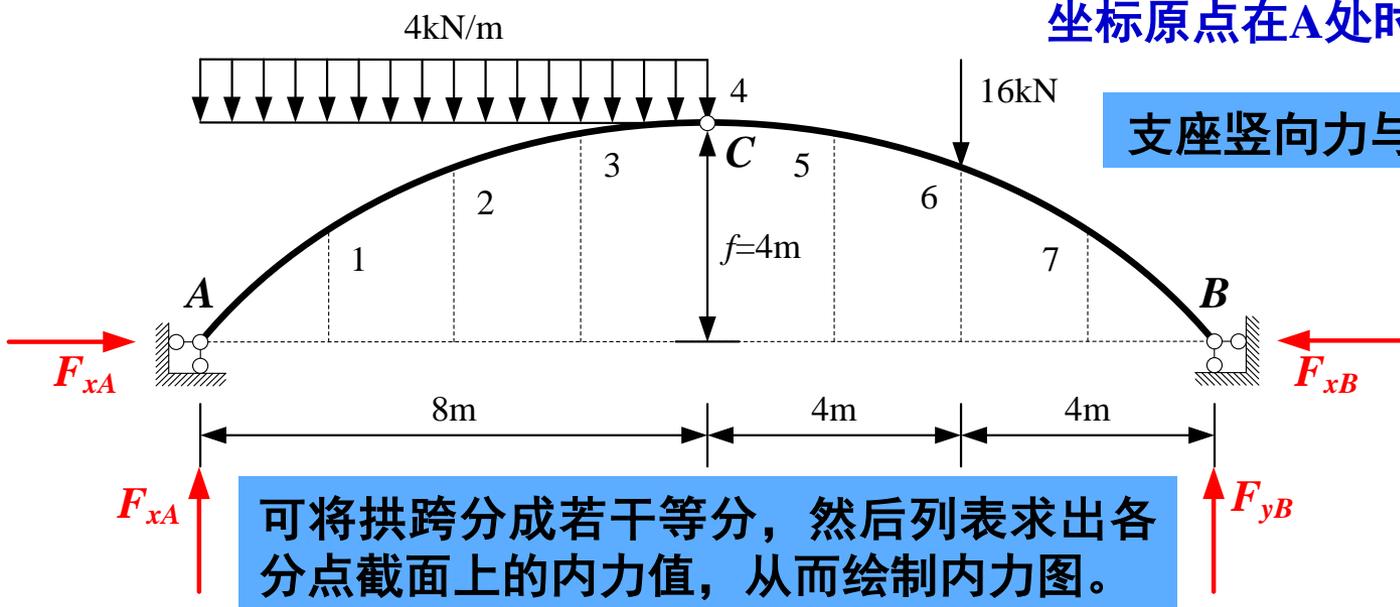
$$F_{Q2} = (F_{yA} - qx_2) \cos \varphi_2 - F_H \sin \varphi_2 = 0$$

$$F_{N2} = (F_{yA} - qx_2) \sin \varphi_2 + F_H \cos \varphi_2 = 26.8kN$$

# 3.7 三铰拱

例1：试绘制图示三铰拱的内力图

坐标原点在A处时拱轴线： $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$



支座竖向力与相应简支梁反力相同

$$F_{yA} = F_{yA}^0 = 28kN$$

$$F_{yB} = F_{yB}^0 = 20kN$$

支座处水平推力

$$F_H = \frac{M^0}{f} = 24kN$$

分点 6

$$y_6 = \frac{4f}{l^2} x_6(l-x_6) = 3m$$

$$\tan \varphi_6 = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_6} = \frac{4f}{l^2} (l-2x_6) = -0.5$$

$$M_6 = M_6^0 - F_H y_6 = 8kN \cdot m$$

$$F_{Q6}^L = (F_P - F_{yB}) \cos \varphi_6 - F_H \sin \varphi_6 = 7.15kN$$

$$F_{Q6}^R = (0 - F_{yB}) \cos \varphi_6 - F_H \sin \varphi_6 = -7.15kN$$

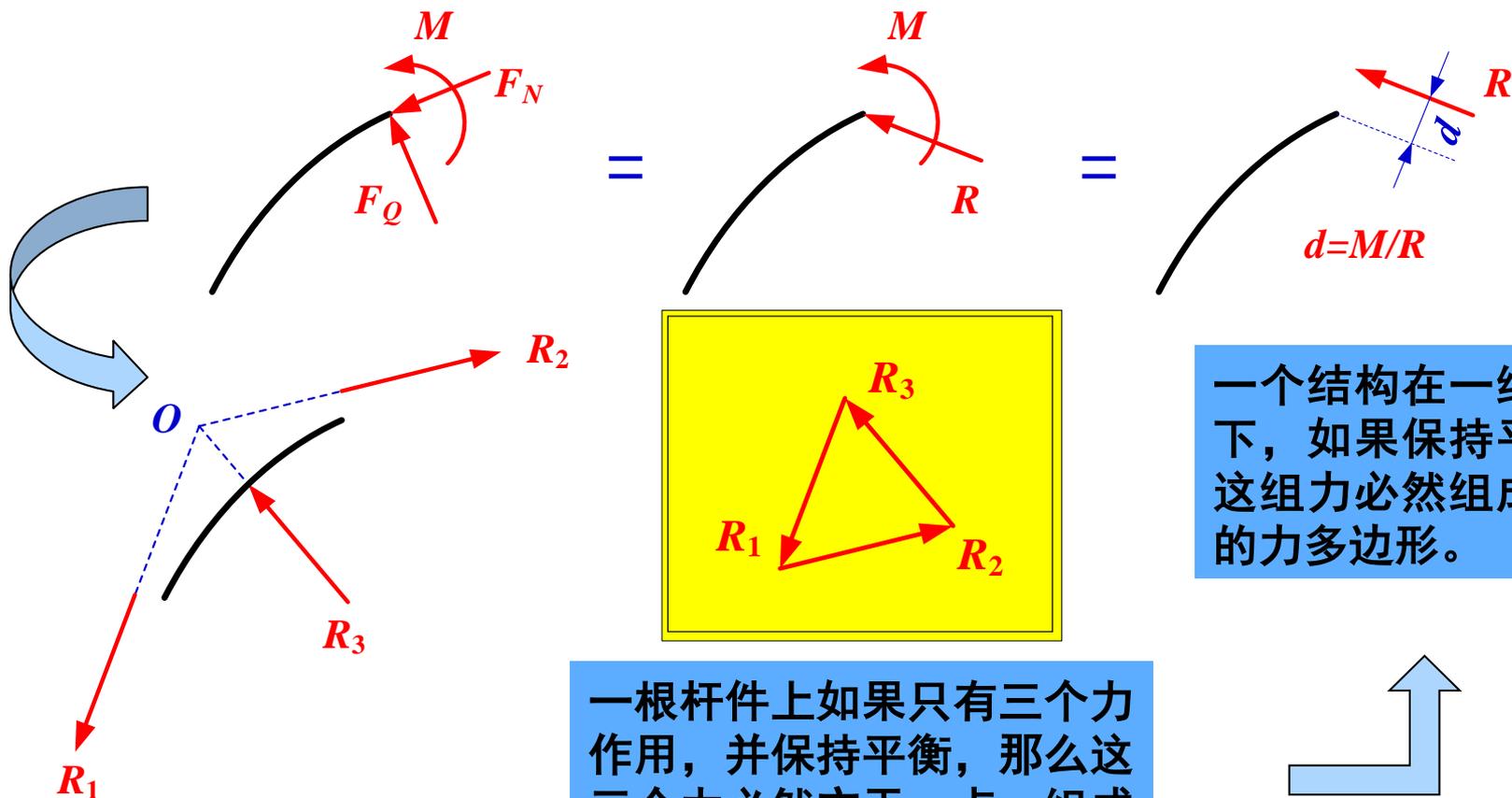
$$F_{N6}^L = (F_P - F_{yB}) \sin \varphi_6 + F_H \cos \varphi_6 = 23.24kN$$

$$F_{N6}^R = (0 - F_{yB}) \sin \varphi_6 + F_H \cos \varphi_6 = 30.40kN$$

# 3.7 三铰拱

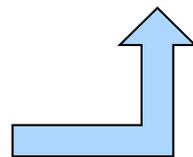
## 三铰拱的压力线及合理拱轴线

一根杆件的任意截面上都有三个内力，它们可以用一个合力表示。



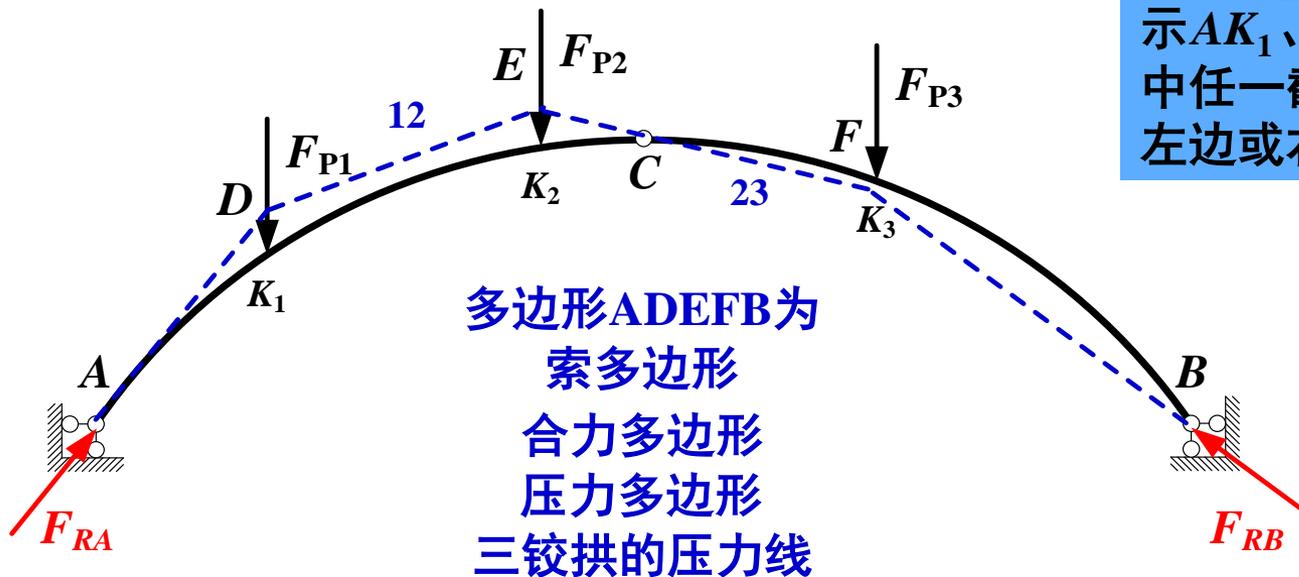
一个结构在一组力的作用下，如果保持平衡，那么这组力必然组成一个封闭的力多边形。

一根杆件上如果只有三个力作用，并保持平衡，那么这三个力必然交于一点，组成一个封闭的力三角形。

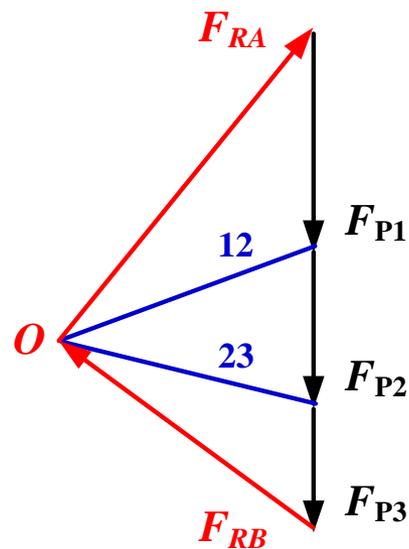


# 3.7 三铰拱

## 三铰拱的压力线及合理拱轴线



射线 $F_{RA}$ 、12、23、 $F_{RB}$ 分别表示AK<sub>1</sub>、K<sub>1</sub>K<sub>2</sub>、K<sub>2</sub>K<sub>3</sub>、K<sub>3</sub>B四段中任一截面所受的合力，即截面左边或右边所有外力的合力。

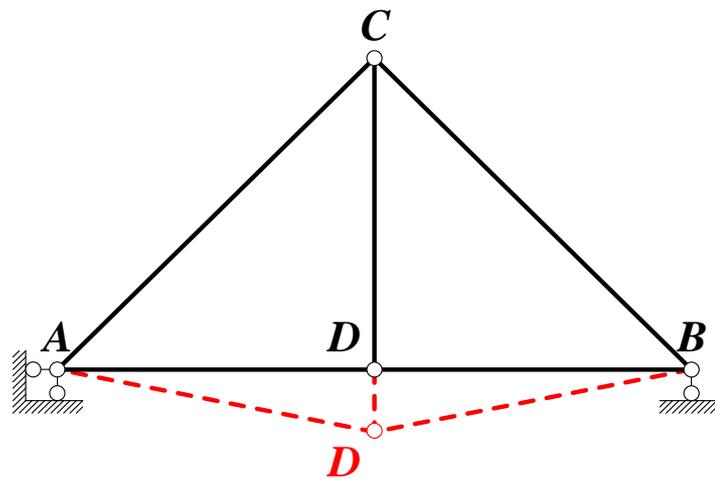
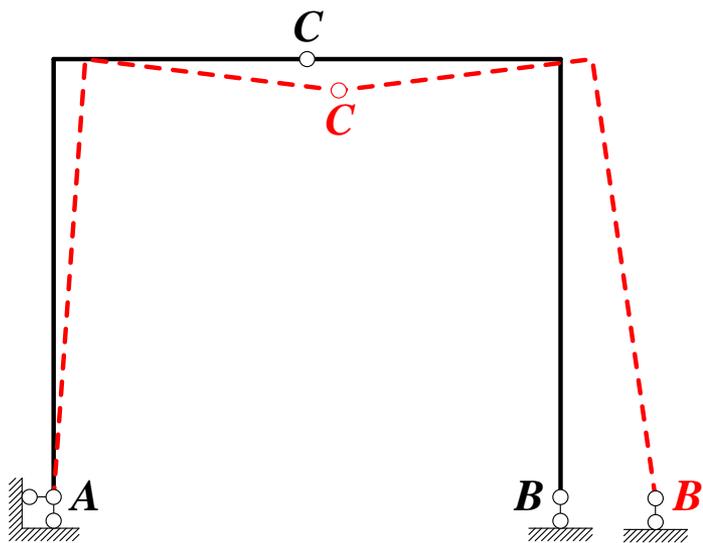
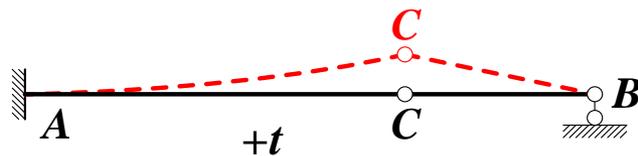


压力线的概念在砖石和混凝土拱的设计中有重要意义。由于这些材料的抗拉强度较抗压强度低得多，通常要求截面上不出现拉应力。因此，压力线不应该超过截面的核心区。若拱的截面为矩形，而矩形截面的核心高度为截面高度的三分之一，故压力线不应超出截面对称轴上三等分的中段范围。

# 3.8 静定结构的一般性质

满足平衡条件解答的唯一性是静定结构最基本的静力特征

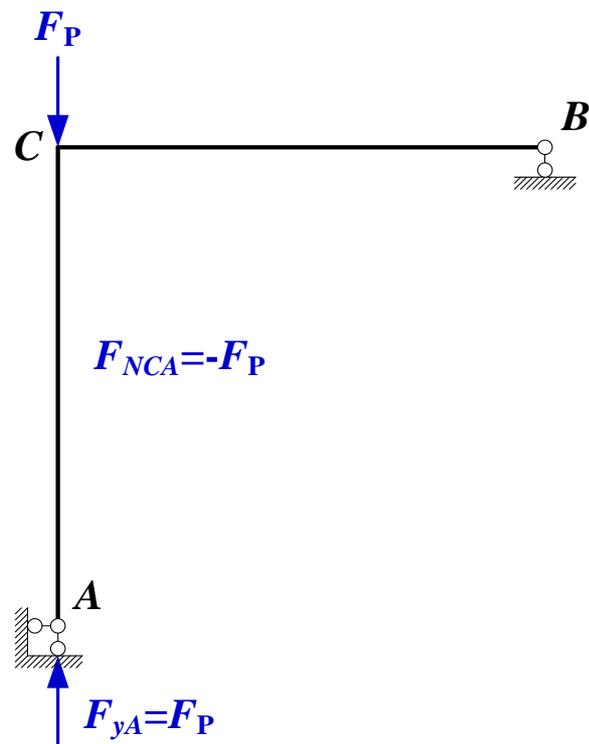
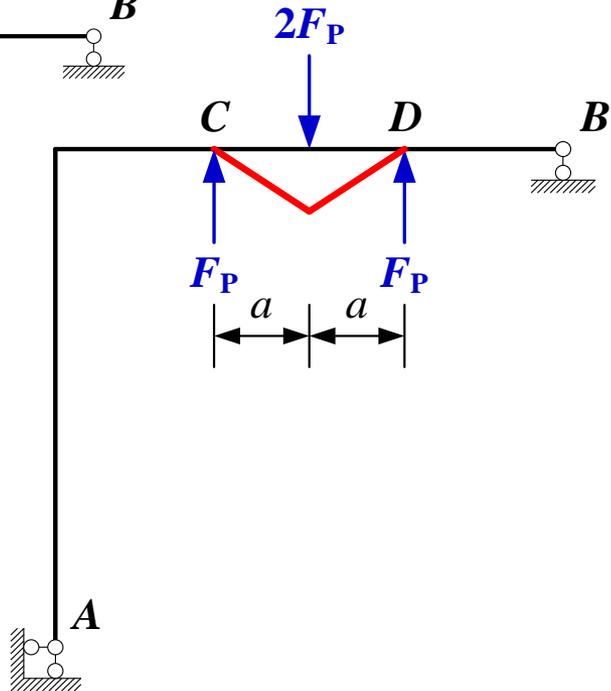
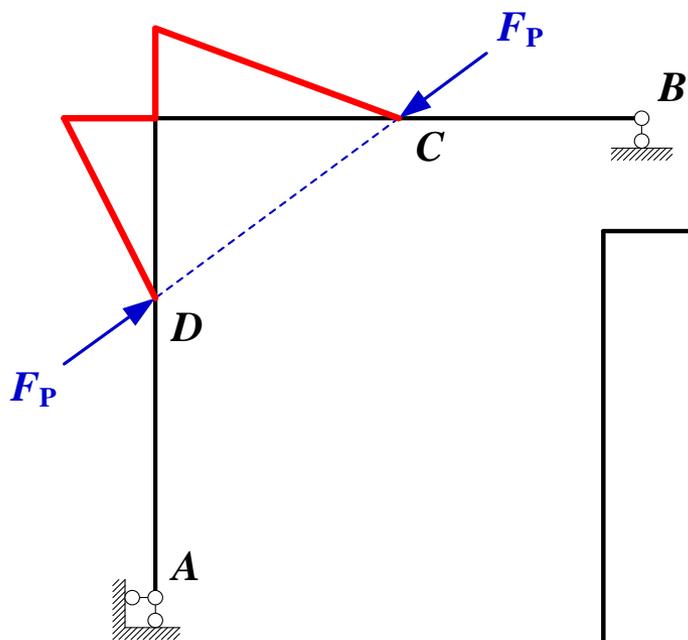
- 温度变化、支座位移、材料收缩和制造误差等非荷载因素不引起静定结构的内力



# 3.8 静定结构的一般性质

满足平衡条件解答的唯一性是静定结构最基本的静力特征

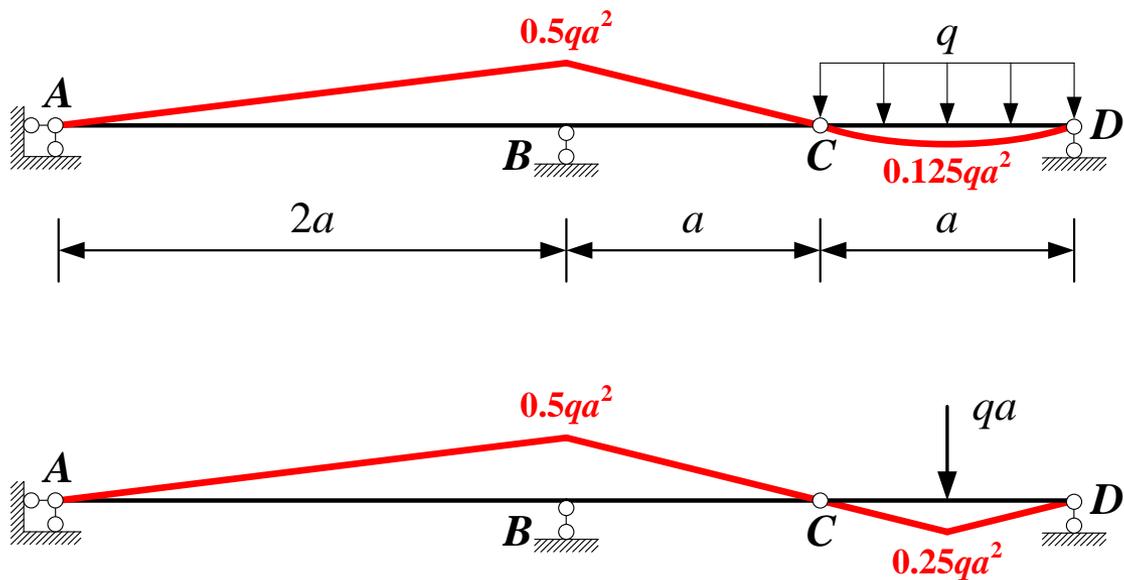
- 平衡力系作用于静定结构中某一几何不变或可独立承受该平衡力系的部分时，则仅有该部分受力，而其余部分的反力和内力均为零。



# 3.8 静定结构的一般性质

满足平衡条件解答的唯一性是静定结构最基本的静力特征

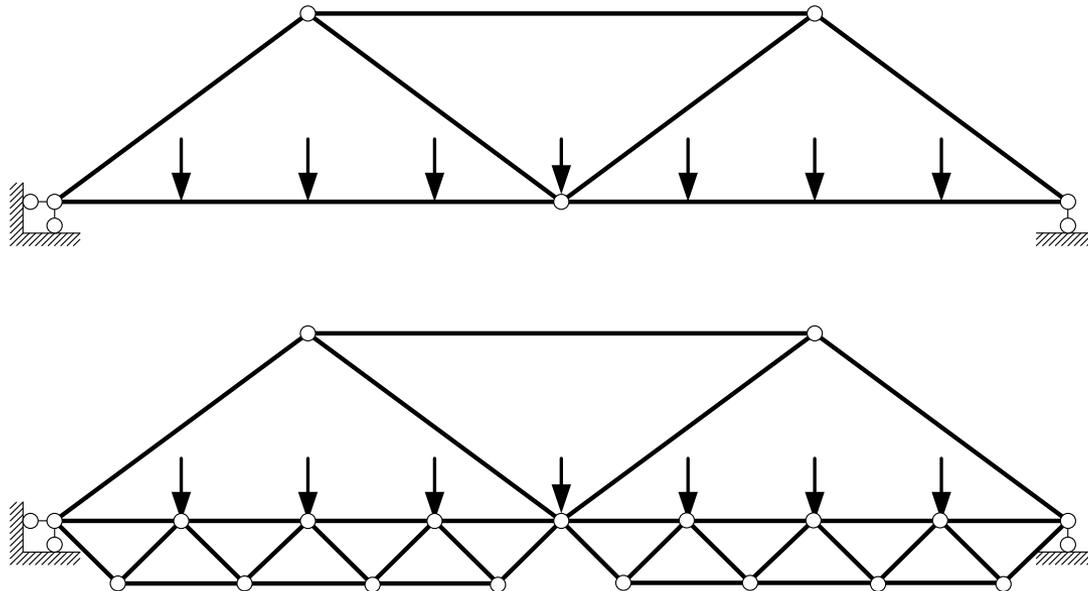
- 当作用于静定结构中某一几何部分上的荷载作等效变换时，则仅有该部分的内力发生变化，而其余部分的反力和内力均不变。



## 3.8 静定结构的一般性质

满足平衡条件解答的唯一性是静定结构最基本的静力特征

- 静定结构中某一几何不变部分做几何构造改变时，其余部分的反力和内力均不变



# 3.8 静定结构的一般性质

