数学分析中的典型问题与方法

(第二版2010年重印)勘误

说明：

1.仅指出本人做裴礼文发现的错误,由于水平非常有限,失误或不当之处肯定不少,还请指正. 这只作为第二次初稿,*TeX*原代码也发出,这样方便别人修改指出错误.

2.题目有些解答参考了博士家园网友的解答以及数学分析解答库整理.

3.使用了一些关不上的窗的代码,表示感谢.

4.有些印刷错误没有指出，印刷错误比较严重的指出一下.

5.对于有多种方法的题此文档只指出很少几个.

6.把书中错误放在前面，其它并非错误的有些题目放在附录.

zhangwei

2013 年 5 月 18 日

1.例1.1.5.第5页第四行是错误的.即

$$f(x+nT) \neq \sum_{i=0}^{n-1} F(x+iT) + f(x)$$

(注意$f(x+nT) - f[x+(n-1)T] \neq F[x+(n-1)T]$).

下面是$tian$27546的解答,链接 $\boxed{tid = 23018}$

解 设$F(x) = f(x+\frac{1}{6}) - f(x)$,则$F(x+\frac{1}{7}) = F(x)$, 故$F(x)$以$\frac{1}{7}$为周期,故也以1为周期. 所以$F(x+1) = F(x)$,即$f(x+\frac{1}{6}) - f(x) = f(x+\frac{7}{6}) - f(x+1)$

即,$f(x+1) - f(x) = f(x+\frac{7}{6}) - f(x+\frac{1}{6})$,有$f(x+1) - f(x)$以$\frac{1}{6}$ 为周期，故也以1为周期.

因此$f(x+nT) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} [f(x+iT) - f(x+(i-1)T)] = n[f(x+T) - f(x)]$

又因为$f(x)$有界，故$\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x+nT) - f(x)}{n} = 0$.

所以$f(x+1) = f(x)$.故1是$f(x)$的一个周期.

2.第29页习题1.2.2的(2)应加上条件$|q| < 1$.

3.第29页习题1.2.4的x_n从$k=2$开始，即改为$\sum_{k=2}^{n} \dfrac{\cos k}{k(k-1)}$

4.第68页习题1.4.6提示的第二行$Abel$变换错了,改为：

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k = \sum_{k=2}^{n} p_k(S_k - S_{k-1}) + p_1 S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (p_k - p_{k+1}) S_k + p_n S_n$$

5.第94页习题1.5.9答案错误，结果为$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

6.第96页习题1.5.22印刷错误很多。对再提示中的a全部换成 α 。 再提示第三行有些x_0^2漏了平方，进行重写如下.

$2\alpha \geq 2x_0^2 \Rightarrow 3\alpha - \alpha \geq 3x_0^2 - x_0^2 \Rightarrow 3\alpha + x_0^2 \geq 3x_0^2 + \alpha \Rightarrow x_0 \leq \frac{x_0(3\alpha + x_0^2)}{3x_0^2 + \alpha} = x_1$.

7.第129页例2.1.2的证明第7行有问题.即$M(x) \leq M(x_0 - 0)$有问题.

可见帖子 $\boxed{tid = 21627}$ 另外一个帖子找不到了.

另外H老师给出此题一个十分简单的办法，在数学分析解答库中也有这个问题，见解答库第三章第一题，此题的连接 $\boxed{tid = 20334}$.

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明:$m(x) = \min\limits_{t\in[a,x]} f(t), M(x) = \max\limits_{t\in[a,x]} f(t)$均在$[a,b]$上连续。

(由于$f(x)$连续，这里和取上确界是等价的)

证明: 只证$m(x)$在$[a,b]$上连续，事实上，对$\forall\ a \le x_1 < x_2 \le b$

$$0 \le m(x_1) - m(x_2) \le \max_{t\in[x_1,x_2]} f(t) - \min_{t\in[x_1,x_2]} f(t) = \omega(f,[x_1,x_2])$$

根据$f(x)$在$[a,b]$上连续可知它在$[a,b]$上一致连续，从而

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, st\ \forall\ a \le x_1 < x_2 \le b$$

只要$x_2 - x_1 < \delta$，就有$\omega(f,[x_1,x_2]) < \varepsilon$

从而对这样的δ, x_1, x_2,必有

$$0 \le m(x_1) - m(x_2) < \varepsilon$$

从而$m(x)$在$[a,b]$上一致连续，即连续。 类似地，当$M(x)$是$f(x)$在$[a,x]$的最大值时，$M(x)$亦连续.

8.第164页习题2.2.18(10)此题解答是错误的，导数符号判断不对，这里不写了。

9.第218页例3.2.17.提示中将(1)改写成：

$$\frac{1}{b}e^{b} - \frac{1}{a}e^{a} = (1-\xi)e^{\xi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

10.第256页习题3.3.1，所给的答案不对.应为

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

11.第298页习题3.5.2，$F(\pi) = -\frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

12.第306页例4.1.3结果应为 $\pi\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$

在解答库中第二章积分部分第8题有这个题.这里直接引用.

见帖子 $\boxed{tid = 21293}$

先求 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$

[解法一](其他三种解法见附录)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

令$I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi}\ln(\alpha+\cos x)\mathrm{d}x, \alpha > 1,$ 易知$I(\alpha, x)$可导

$$\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\sin x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha d(\cot x)}{(\alpha\cot x)^2+\alpha^2-1} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\arctan\frac{\alpha\cot x}{\sqrt{\alpha^2-1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad I(\alpha) = \pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}) + C \Rightarrow I(1) = \pi\ln(1+0) + C = C$$

$$\because \qquad I(1)=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\mathrm{d}t=-\pi\ln 2$$

$$\therefore \qquad I(\alpha)=\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$$

令$\alpha=2$, $$\therefore \qquad \int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

于是例4.1.3的结果为：

$$e^{\pi\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)}=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^{\pi}$$

13.第403页例4.5.12解中第二行改为与$\frac{1}{x^{1-\alpha}}$同阶.

14.第407页例4.5.17解中第四行

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left[\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)\right]^{-\frac{1}{3}}$$

例外此页中倒数第二行

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}+o(\frac{1}{x^2})$$

其中$o(\frac{1}{x^2})$严格而言是不对的.

15.第538页习题5.2.30 此题需要说明一下，2010年以后的版本此题题目已经改正了。但之前(或更早的版本是错的,钱吉林的数学分析题解精粹(第二版)上此题还是错的在第381页第704 题。错在不可逐项求导。H老师和版主证明了极限不存在，见贴 $\boxed{tid=21332}$)。 即应为：

$\sum_{n=0}^{\infty}2^{-2n}\cos 2^n x$, 求$\lim_{x\to 0+}x^{-1}(f(x)-f(0))$(北京师范大学)

但此题提示还是错的，提示第二行改为：

$$\lim_{x\to 0+}x^{-1}(f(x)-f(0))=f'_+(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-2n}\cos 2^n x)'|_{x=0}=0$$

16.第577页习题5.3.2(a)改为$R\geq\min(R_1,R_2)$.

17.第615页习题5.4.12(6)区间$[0,\pi]$改为$(0,\pi]$.

18.第616页习题5.4.16(1),$D_n(x)$改为$D_{n-1}(x)$.

19.第616页习题5.4.16(3),积分的前面加上系数$\frac{1}{n\pi}$.

20.第623页l例6.1.11(3)解答中$y=x^2$改为$x=y^2$.

21.第810页例7.1.53.此题解答第811页3^o中第二行
$t>1,\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-ny}y^{t-1}$关于$y\in[0,A](A>0)$一致收敛.
感觉不一致收敛啊,取$t=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{n}$就不对。这题请教一下这个。谢谢.

22.第810页习题7.1.7(b)积分函数分母里面漏了绝对值.改为$\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\mathrm{d}x$

23.第839页上方练习2结果应为: $\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e\sin 1$.

24.第855页上方练习(1)结果应为: $\frac{5\pi}{192}$

25.第855页上方练习(2)结果应为: $\frac{\pi}{8}$

26.第866页练习1第三行改为:

$$I=\iiint_\Omega x^2y^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

.

27.第910页习题7.2.2改为:

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

28.第917页习题7.2.19将题目中的曲面改为

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz$$

29.第935页例7.3.11,图7.3.4椭圆画错了，焦点在y轴上.

30.第938页例7.3.14提示中给的解答不全面，应考虑两种不同的类型.

31.第969页例7.4.3此题书上多算了一部分(970页倒数第七行至此页结束删掉.)最后结果为： $\frac{\pi a^3}{2}$.

32.第975页例7.4.9,第四行改为$M = \max\limits_{-1\le t\le 1}\{|f'(t)|\}$.

33.第1009页参考答案下面(ii)的解答错误,见贴 $\boxed{tid = 25555}$

附录

1*,第205页的习题3.1.22, $\boxed{\textit{tid} = 2958}$ 做法估计对的，但总感觉这样做不太好.希望高手说明一下.

2*,第234页习题3.2.13取$\xi = \frac{1}{2}$即可得证，当然此题不能说错误，只是存在这个bug.

3*,第240页的3.2.34,3.2.35可以从参看数学分析精选习题全解 薛春华,徐森林书上的解答.其实其它一些题目也可以从此书找到答案. $\boxed{\textit{tid} = 24324}$

4*第266页例3.4.7所给的证明构造的函数不好，构造 $F(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$要简单一些.

5*.第306页例4.1.3 $\boxed{\textit{tid} = 21293}$

[解法二] 考虑积分$I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x$，则有：

$$I(a) = 0, (a^2 \le 1)$$
$$I(a) = \pi \ln a^2, a^2 > 1$$

证明：当$a^2 < 1$时有：

$$\begin{aligned}
2I(a) &= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \ln(1 + 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos 2x + a^4)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a^2\cos x + a^4)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos x + a^4)\mathrm{d}x \\
&= I(a^2)
\end{aligned}$$

从而：

$$I(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{I(a^{2^n})}{2^n}$$

考虑极限

$$\lim_{n\to\infty} I(a^{2^n}) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^{2^n}\cos x + a^{2^{n+1}})\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi \ln 1 \mathrm{d}x = 0$$

因此$I(a) = 0$.

当$a^2 = 1$时可以直接计算出积分为0.

当$a^2 > 1$时：

$$I(a) = \int_0^\pi \ln a^2 \mathrm{d}x + \int_0^\pi \ln\left(1 - 2\frac{1}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \pi \ln a^2$$

对于本题：

$$\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln\frac{1}{2(2+\sqrt{3})}\mathrm{d}x + \int_0^\pi \ln\left(1 + 2(2+\sqrt{3})\cos x + (2+\sqrt{3})^2\right)\mathrm{d}x$$
$$= \pi\ln(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

[解法三] 令

$$f(y) = \int_0^\pi \ln(y+\cos x)\mathrm{d}x, y \geq 1,$$

则f在$(1,+\infty)$上连续可微, 且

$$f'(y) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{y+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}, y > 1.$$

从而

$$f(y) = \pi\ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) + C, y > 1,$$

其中C为待定常数. 以下证明f在$y=1$右连续. 事实上,

$$|f(y) - f(1)| = 3\int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{y-1}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$$
$$\leq 3\int_0^\pi \ln\left(1 + \left(\frac{y-1}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x$$
$$\leq 3\sqrt[3]{y-1}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}$$
$$\to 0 (y \to 1+0).$$

这说明f在$y=1$右连续. 以上利用了不等式$(a+b)^{1/3} \leq a^{1/3} + b^{1/3}, a, b \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x, x \geq 0$以及反常积分$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}$收敛这一事实. 容易求出

$$f(1) = \int_0^\pi \ln(1+\cos x)\mathrm{d}x = -\pi\ln 2.$$

从而

$$-\pi \ln 2 = f(1) = \lim_{y \to 1+0} f(y) = C.$$

因此

$$f(y) = \pi \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) - \pi \ln 2, y \geq 1.$$

所求积分为

$$\int_0^\pi \ln(2 + \cos x) \mathrm{d}x = f(2) = \pi \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

[解法四] 用复分析的办法：我们找这样一个解析函数 $F(z) = a + bz$，其中 a, b 是实数而且 $|a| > |b|$，这样一个解析函数在单位圆及其一个邻域内处处不为零，所以存在一个在单位圆及其邻域内解析的函数 $G(z)$ 使得 $F(z) = e^{G(z)}$，从而

$$|F| = e^{\mathrm{Re}G(z)}, \quad \ln|F| = \mathrm{Re}G.$$

由于解析函数的实部是调和函数，所以根据调和函数的均值性质，在单位圆周上的积分的平均值等于其在原点的函数值，得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}| \,\mathrm{d}\theta = \ln|F(0)| = \ln|a|.$$

现在 $\ln|a + be^{i\theta}| = \dfrac{1}{2} \ln(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)$. 我们希望

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2, \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

解得 $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，从而

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(2 + \cos\theta) \,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(2 + \cos\theta) \,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}| \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}| \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \ln(\frac{\sqrt{3}+1}{2}). \end{aligned}$$

于是例4.1.3的结果为：

$$e^{\pi \ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^\pi$$

由于第366页4.3.7,4.3.9,4.3.10这几个题常出现在论坛，所以也贴上解答.

6*习题4.3.7很多帖子出现过.没有仔细找.方法也不唯一. $\boxed{tid = 26305}$

证.反证法，对任意的$c \in [a,b]$都有,$|f'(c)| \le \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx$.我们来推出$f(x) \equiv 0$这个矛盾。下记$K = \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx$.

由$Lagrange$中值定理，$\forall x \in (a, \frac{a+b}{2}), \exists \xi \in (a,x), s.t.$

$|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}| = |f'(\xi)| \le K$,即有$|f(x)| \le K|x-a|, \forall x \in (a, \frac{a+b}{2})$

同理：$\forall x \in (\frac{a+b}{2}, b), \exists \eta \in (x,b), s.t.$

$|\frac{f(x)-f(b)}{x-b}| = |f'(\eta)| \le K$,即有$|f(x)| \le K|x-b|, \forall x \in (\frac{a+b}{2}, b)$.

故，

$$\begin{aligned}
K &= \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx \\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|dx\right) \\
&\le \frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} K|x-a|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b K|x-b|dx\right) \\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\frac{(b-a)^2}{4}K \\
&= K
\end{aligned}$$

故等号必须成立，于是：$|f(x)| = K|x-a|, \forall x \in (a, \frac{a+b}{2})$ 且有 $|f(x)| = K|x-b|, \forall x \in (\frac{a+b}{2}, b)$同时成立.

即$f(x) = \pm K(x-a), \forall x \in (a, \frac{a+b}{2})$ 且有 $f(x) = \pm K(x-b), \forall x \in (\frac{a+b}{2}, b)$同时成立.若$K \neq 0$,则$f(x)$在$\frac{a+b}{2}$处必不可微，故$K = \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx = 0$.而又$f(x)$连续，故$f(x) \equiv 0$,矛盾。于是原结论成立。

7*习题4.3.9 好多帖子出现过此题，找到三个. $\boxed{tid = 2401}$ $\boxed{tid = 23990}$ $\boxed{tid = 26325}$

证：$n = 1$时直接验证成立. $n \ge 2$ 时, 首先有:

$$|\sin nt| \le n \sin t, \forall t \in [0, \pi/2],$$

$$\sin t \ge \frac{2t}{\pi}, \forall t \in [0, \pi/2].$$

故对任意$\delta \in (0, \pi/2)$,

$$I_1 = \int_0^\delta t \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt < n^4 \int_0^\delta t dt = \frac{n^4\delta^2}{2},$$

$$I_2 = \int_\delta^{\pi/2} t \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt < \frac{\pi^4}{16} \int_\delta^{\pi/2} \frac{dt}{t^3} = \frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

因此：

$$I = I_1 + I_2 < \frac{n^4\delta^2}{2} + \frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

显然上式右边在$\delta = \frac{\pi}{2n}$处到达最小值$\frac{\pi^2 n^2}{4} - \frac{\pi^2}{8}$, 从而

$$I < \frac{\pi^2 n^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} < \frac{\pi^2 n^2}{4}, n \geq 2.$$

8*习题4.3.10这个题也是多次出现,没找到具体帖子,找到几个关于这个题的帖子地址,可是失效了.下面这两个都有此题可是失效了. $\boxed{tid = 1923}$ $\boxed{tid = 631}$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(2n+1)x|}{x}dx \\
&\leq \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}dx \\
&\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}dx + \sum_{k=1}^{2n}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{|\sin x|}{x}dx\right) \\
&\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}|\sin x|dx\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\right) \\
&\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{2n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}(1 + \ln 2) + \frac{2}{\pi^2}\ln n
\end{aligned}$$

欲证题中不等式，只需说明

$$2 - \pi + 2\ln 2 + 2\ln n < \frac{\pi^2}{2}\ln n$$

而这是显然的

$$2-\pi+2\ln 2+2\ln n\le 4\ln n<\frac{\pi^2}{2}\ln n,(n\ge 2)$$

如果$n=1$，在前面式子中有

$$\begin{aligned} I &\le \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{\pi}\right)\\ &=1+\frac{3-\pi}{\pi^2}<1 \end{aligned}$$

9*第760页应用*Green*公式要简单的多，参看谢惠民书上.

10*.第878页例7.2.21(3)结果为: $\frac{20}{3003}\pi abc$.

11*.第916页习题7.2.15结果

$$\frac{4pa^{2m}R^{2m+3}}{(2m+1)(2m+3)}+\frac{4qb^{2n}R^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{4rc^{2l}R^{2l+3}}{(2l+1)(2l+3)}$$