

自组织临界

国家天文台
钱磊
(qianlivan@gmail.com)

Chapter 1

解析模型

1.1 指数增长模型

对于由很多指数增长峰形成的时间序列，可以计算峰的数量随峰值大小的分布。如果每个峰的增长规律为

$$W(t) = W_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_G}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1.1)$$

其中 τ_G 是指数增长时标，饱和时间 τ 对应饱和峰值

$$W_S = W(t = \tau) = W_0 \exp\left(\frac{\tau}{\tau_G}\right). \quad (1.2)$$

峰的高度可以表示为饱和值和本底值之差

$$P = W_S - W_0 = W_0 \left[\exp\left(\frac{\tau}{\tau_G}\right) - 1 \right]. \quad (1.3)$$

假设峰的数量随饱和时间 τ 的分布为指数分布

$$N(\tau)d\tau = \frac{N_0}{t_S} \exp\left(-\frac{\tau}{t_S}\right), \quad (1.4)$$

其中 t_S 是一个时间量纲的常量。分布函数自变量换为 P 得到

$$N(P)dP = N[\tau(P) \left| \frac{d\tau}{dP} \right|]dP \quad (1.5)$$

由峰值的定义式，方程 1.3可以得到

$$\tau(P) = \tau_G \ln\left(\frac{P}{W_0} + 1\right). \quad (1.6)$$

求导得到

$$\frac{d\tau}{dP} = \frac{\tau_G}{W_0} \left(\frac{P}{W_0} + 1 \right)^{-1}, \quad (1.7)$$

带入方程 1.5可以得到

$$\begin{aligned} N(P)dP &= \frac{N_0}{t_S} \exp\left(-\frac{\tau}{t_S}\right) \frac{\tau_G}{W_0} \left(\frac{P}{W_0} + 1 \right)^{-1} dP \\ &= \frac{N_0(\alpha_P - 1)}{W_0} \left(\frac{P}{W_0} + 1 \right)^{-\alpha_P} dP. \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中幂律指数

$$\alpha_P = \left(1 + \frac{\tau_G}{t_S} \right) \quad (1.9)$$

由峰的增长时标 τ_G 和分布函数的特征量 t_S 决定。所有的物理因素都包含在这两个量中，除此之外，模型中再无物理内容。

1.2 幂律增长模型

和指数增长模型类似，也可以考虑幂律增长模型。假设每个峰的增长规律为

$$W(t) = W_0 \left[1 + \left(\frac{t}{\tau_G} \right)^p \right], \quad (1.10)$$

其中 τ_G 是峰的增长时标。假设经过时间 τ 达到峰的饱和值 W_S ，则有

$$W_S = W(t = \tau) = W_0 \left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_G} \right)^p \right], \quad (1.11)$$

峰的高度为

$$P = W_S - W_0 = W_0 \left(\frac{\tau}{\tau_G} \right)^p. \quad (1.12)$$

于是

$$\tau(P) = \tau_G \left(\frac{P}{W_0} \right)^{1/p}, \quad (1.13)$$

求导可以得到

$$\frac{d\tau}{dP} = \frac{\tau_G}{pW_0} \left(\frac{P}{W_0} \right)^{1/p-1}. \quad (1.14)$$

假设峰的数量随持续时间的分布是指数分布，和上一节相同（方程 1.4），那么峰的数量随峰值的分布可以通过类似的步骤得到

$$N(P)dP = \frac{N_0(\alpha_P - 1)}{pW_0} \exp \left[-(\alpha_P - 1) \left(\frac{P}{W_0} \right)^{1/p} \right] \left(\frac{P}{W_0} \right)^{1/p-1}, \quad (1.15)$$

其中 $\alpha_P = 1 + \tau_G/t_S$ 。所以最终峰的数量随峰值的分布是偏离幂律的。

Chapter 2

讨论

自组织临界现象的研究主要依赖于计算机模拟。但是研究的目的是理解而不是重现，而解析模型正是用来帮助我们理解的。从上一章可以看出，不同的增长模型对应不同的分布函数，精确确定分布函数的形式和参数就可以区别增长模型，从而限制背后的物理过程。