勒让德变换

武际可

. §1　勒让德变换的提出

法国数学家、天文学家勒让德（Legendre, Asrien-Marie，1752-1833）出生在一个比较富有的家庭，从小受到良好的教育。18 岁时，通过了数学物理的毕业论文答辩。只后在大学教授过数学，31 岁时被选入科学院。

1789 年法国大革命后，于 1790 年宣布要对当时相当混乱的度量衡制度进行改革。科学院组成了一个由拉格朗日为首的委员会。委员会建议以从赤道到北极的一千万分之一为长度基本单位－－米，这个方案于 1791 年被法国国民议会通过。于是就要着手实际测量从赤道到北极的长度。勒让德参加了测量，并且是经度局的一名成员。1813 年拉格朗日逝世，勒让德接替他成为经度局的主席。他在数学上的贡献，勒让德多项式就是在计算地球形状时的一项创造。

勒让德像

勒让德在数学上的贡献是多方面的，他在解析数论、椭圆函数、几何学、天体力学等方面都有重要的贡献。

1787 年，勒让德在蒙日关于最小曲面研究的启发下，给出了勒让德变换。勒让德变换在勒让德的贡献中，开始并没有引起人们广泛的注意，而且，开始只是对于几何问题的讨论引进的。不过随着历史的发展，它在无论是数学还是力学与物理中都显示了它的重要性，经过人们对它的推广，被广泛应用于许多方面。

勒让德变换是从以下偏微分方程出发的

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+S\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad (1.1)$$

其中若令$\partial z/\partial x = p, \partial z/\partial y = q$，再令 R、S、T 仅是 p,q 的函数。令曲面 $z = f(x, y)$ 的切平面为

$$px + qy - z - v = 0 \text{，} \qquad (1.2)$$

则应当有

$$R\frac{\partial^2 v}{\partial q^2} - S\frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q} + T\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = 0 \qquad (1.3)$$

（1.2）式在变量 x,y 与它们的对偶变量 p,q 之间给了一个变换。把这个变换具体写出来就是对它求微商得

$$\partial z/\partial x = p, \partial z/\partial y = q; \partial v/\partial p = x, \partial v/\partial q = y \qquad (1.4)$$

考虑到上面变换的雅科比矩阵应当互逆，即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} \end{pmatrix}$$

于是有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2},$$

$$\text{其中}\Delta = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} \end{Vmatrix}$$

这个变换把一个拟线性方程（1.1）变到一个线性方程（1.3）。

§2. 勒让德变换

令

$$y = y(x) \text{，} \qquad (2.1)$$

$$y' = t = \frac{dy}{dx}, \qquad (2.2)$$

$$u = u(t) \text{，} \qquad (2.3)$$

$$u' = \frac{du}{dt} \text{。} \qquad (2.4)$$

从（2.2）反解出 x 为 t 的函数并代入下式

$$u=xt-y \tag{2.5}$$

把这个式子微分得

$$\mathrm{d}u=x\mathrm{d}t+t\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=x\mathrm{d}t+\left(t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=x\mathrm{d}t,$$

由此，显然得到 u 是 t 的函数，并且对 t 的导数是 x。

（2.5）式确定了变量 u、y，x、t 之间的一个变换。它把 $y=y(x)$变到了

$$\begin{aligned} t&=t(x)\\ u&=u(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

同样，由（2.5）可以得 $y=xt-u$，它定义了另一个与上面变换相反的变换。所以这两个变换是相互的，它们的关系是对等的。

勒让德变换有这样一个性质，即如果在 x、y 平面上的两条曲线是相切的，变换到 u、t 平面也是相切的，反之亦然。具有这种性质的变换称为接触变换。勒让德变换是接触变换的特殊情形。

把以上的思想推广到多变量的情形，设有 n 个变量 $q_1,q_2,\ldots,q_n$ 的函数 $U=U(q_1,q_2,\ldots,q_n)$，它具有直到二阶以上的连续微商，取新的一组变量

$$Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2.7}$$

它们组成对原变量 $q_1,q_2,\ldots,q_n$ 的一组变换其雅科比行列式

$$\left\|\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right\|=\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\right\|\neq 0$$

从（2.7）可以把原变量反解出来得

$$q_i=q_i(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2.8}$$

考虑新函数

$$U^c=\sum_{i=1}^{n}Q_iq_i-U, \tag{2.9}$$

对上式微分得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U^{c} &= \sum_{i=1}^{n}(Q_i \mathrm{d}q_i + q_i \mathrm{d}Q_i) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}Q_i + \sum_{i=1}^{n}(Q_i - \frac{\partial U}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}Q_i + \sum_{i=1}^{n}(Q_i - \frac{\partial U}{\partial q_i})\mathrm{d}q_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{d}Q_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U^{c}}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i
\end{aligned}
$$

由此我们证明了

$$
q_i = \frac{\partial U^{c}}{\partial Q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.10}
$$

两个函数U 和U^{c}的关系由（2.9）给出。对应的变量和函数的关系分别由（2.7）和（2.10）给出。它们概括了力学与物理中许多对偶关系。

§3 .勒让德变换在力学与物理中的应用

1）.气体的热力学函数

在热力学中，常见的自变量或状态变量有：T、S、p、v 四个，即温度、熵、压强与体积。这四个变量之间两两对偶，前两个之积和后两个之积的量纲都是能量。用体积和熵为自变量表示的内能 U（S，v），有

$$
\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}v \tag{3.1}
$$

可以将自变量改变为其对偶的自变量，于是我们还有和内能同一量纲的三个热力学函数 F（T，v）、H（S，p）、G（T，p），即亥姆霍兹自由能、焓、吉布斯自由能，它们和内能之间的关系是

$$
\begin{aligned}
&U && \mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}v \\
&F = U - TS && \mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}v \\
&H = U + PV && \mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + v\mathrm{d}p \\
&G = U + PV - TS && \mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + v\mathrm{d}p
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

我们看到，这些热力学函数之间的关系恰好是勒让德变换。所以，勒让德变换实际上是在我们得到了一个不变量后，要得到它的对偶自变量下的不变量的一个重要的变换。

2）.哈密尔顿函数

在分析力学中，我们有描述 n 自由度系统的拉格朗日第二类方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3.3}$$

其中 $L=T-U$ 这里 L 为系统的拉格朗日函数，T 为系统的动能，U 为系统的势能，q_j（$j=1,2,\cdots,n$）为系统的广义坐标。

如果我们引进系统的广义动量

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3.4}$$

可以证明，从上式中我们可以把 $\dot{q}_j$ 反解出来作为 p_j 和 q_j 的函数。我们希望引进新的函数 H，它是 p，q 的函数。为此令

$$H=\sum_{j=1}^{n} p_j\dot{q}_j-L \tag{3.5}$$

我们把两边进行变分并利用（3.3）与（3.4）得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H&=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}(p_j\mathrm{d}\dot{q}_j+\dot{q}_j\mathrm{d}p_j)-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\mathrm{d}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}(p_j\mathrm{d}\dot{q}_j+\dot{q}_j\mathrm{d}p_j)-\sum_{j=1}^{n}(p_j\mathrm{d}\dot{q}_j+\dot{p}_j\mathrm{d}q_j)\\
&=\sum_{j=1}^{n}(-\dot{p}_j\mathrm{d}q_j+\dot{q}_j\mathrm{d}p_j)
\end{aligned}$$

比较等式两边，我们就得到

$$\begin{aligned}
\dot{p}_j&=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\\
\dot{q}_j&=\frac{\partial H}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

这就是动力系统的哈密尔顿形式的典则方程。我们看到（3.5）也是一个勒让德变换。

另外，由于拉格朗日函数是 q_j 与 $\dot{q}_j$ 的函数，按照（3.5）转换为哈密尔顿函数是 p_j 和 q_j 的函数，所以变换是把部分自变量变量 $\dot{q}_j$ 变到自变量 p_j 而保持自变量 q_j 不变。由此可以知，勒让德变换可以把自变量中的任意个变量变换到它的对偶量。

3).弹性力学的余能原理

现在我们来讨论弹性体，在（2.9）中，令 U 为弹性体的势能，它是广义位移 q 的函数。则 U^c 就是弹性体的余能。对于弹性体来说，因为自变量是坐标的连续函数，这时（2.9）中的求和号，应当改用积分号。

我们知道弹性体的总势能是

$$U=\frac{1}{2}\iiint_D \Gamma:\mathrm{T}（\boldsymbol{u}）\mathrm{d}v-\iiint_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}v-\iint_{\partial_t D}\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}s \qquad (3.7)$$

其中 Γ 是应变张量 T 是应力张量，$\boldsymbol{f}$ 是体力向量场，$\boldsymbol{u}$ 是位移场，v 是体积，s 是表面积，D 是体积占据的空间区域，∂D 是区域的表面，下标 t 是表面上给定外力 $\boldsymbol{t}$ 的部分。

$$U^c=\iiint_D \Gamma:\mathrm{T}\mathrm{d}v-\iiint_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}v-\iint_{\partial D}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}s-U=\frac{1}{2}\iiint_D \Gamma:\mathrm{T}\mathrm{d}v-\iint_{\partial_{\boldsymbol{u}} D}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}s \qquad (3.8)$$

在满足几何约束的条件下，从总势能的变分 $\delta U=0$ 可以得到弹性体的平衡方程和应力边条件，可以推出在满足平衡条件下，从余能的变分 $\delta U^c=0$ 可以得到弹性体的几何关系与位移边条件。这就是弹性力学的余能原理。

§4. 广义变分原理

我们来考察式（2.9）把所有的项移到一边，然后用一个函数不是它，即令

$$\Pi=U^c+U-\sum_{i=1}^{n}Q_i q_i \qquad (4.1)$$

其中 U 是广义位移 q 的函数，而 U^c 是广义力 Q 的函数。显然对 Π 求变分，我们得到

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\delta U^c+\delta U-\sum_{i=1}^{n}(Q_i\delta q_i+q_i\delta Q_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}-Q_i\right)\delta q_i+\left(\frac{\partial U^c}{\partial q_i}-q_i\right)\delta Q_i\right]\end{aligned}$$

考虑到 δq_i 与 δQ_i 的任意性，我们就有

$$\begin{aligned}Q_i&=\frac{\partial U}{\partial q_i}\\q_i&=\frac{\partial U^c}{\partial q_i}\end{aligned} \qquad (4.2)$$

上式既包含了平衡条件，也包含了几何条件，其中 U 是应变能，U^c 是余应变能。得到的前一个式子是拉格朗日定理，而后一个式子是卡斯提也努定理。

对于得到平衡或几何条件来说，相应的广义力与广义位移应当等于零，即（4.2）的左端应当等于零。这时对应的（4.1）应当适当修改为

$$\Pi = U^c + U \tag{4.3}$$

一般说来，对于弹性力学的情形，这就相当于 Hellinger-Pranger-Reissner 两变量的变分原理。

采用（3.7）和（3.8）的符号，对于弹性力学问题，我们可以把（4.3）写为：

$$\begin{aligned}\Pi &= U^c + U - \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i \\ &= \frac{1}{2}\iiint_D \Gamma : \mathrm{T}\, \mathrm{d}v - \iint_{\partial_{\boldsymbol{u}} D} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{2}\iiint_D \Gamma : \mathrm{T}(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}v - \iiint_D \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}v - \iint_{\partial_t D} \boldsymbol{t}^* \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.4}$$

如果在余能原理的泛函中，通过本构关系把其中都好应力变换为应变。然后加入上式中。这时，对它进行变分，自变函数是位移、应力和应变。我们就得到三变量变分原理。它和胡海昌变分原理是等价的。

§5　结论

勒让德变换是把一个物理不变量变为其对偶坐标下的不变量。由于在物理中，对偶是一个十分基本的概念，所以勒让德变换对于理解这类问题起着重要作用。

参考文献

〔1〕　菲赫金哥尔茨著，微积分学教程，第一卷第二分册，高等教育出版社，1955，pp.474

〔2〕　武际可、王敏中、王炜，弹性力学引论（修订版），北京大学出版社，2001

〔3〕　V.I.Arnold，Mathematical Methods of Classical Mechanics，Springer-verlage，1978，pp.66，366