经典力学发展的两条路径

§1　引言

在经典力学中有两个最重要的概念：动量和动能。而经典力学的核心内容是运动方程，如果令质点的质量为 m，速度为 v，所受的外力为 f，他可以表述为以下两种等价的方式：

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = f \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)}{\mathrm{d}s} = f \tag{2}$$

其中 t 是时间 s 是路程。

(1)和(2)的等价性是显然的，因为

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}s}v = \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)}{\mathrm{d}s} = f\ 。$$

由于动量和动能是完全不同的两类概念。后者需要建立功、能等一系列新的概念。所以更不能说第二种表述是第一种表述的推论。

事情还得从意大利科学家伽利略（Galilei Galileo,1564-1642）说起，1638 年，伽利略发表了他的巨著《关于两门新学科的对话》。在这本书中，虽然还不严格，他第一次提出了对运动的两种度量。伽利略借对话的人物萨耳维阿蒂说：“对于迄今为止所提到的抛体的动量、冲击或打击，我们必须添加一个非常重要的考虑；去确定打击的力和活力，只考虑抛体的速度是不够的，我们还必须考虑目标的性质与条件，它在不小的程度上确定了冲击的效果。首先，如所周知，从抛体的速度当目标部分或完全阻止运动时，它遭受强烈的损害；因为如果冲击落在一个对象上，它就产生冲力，没有阻力这一冲击将是没有效果的；同样，当一个人用枪杆攻击他的敌人，并且在一个瞬时赶上敌人，而敌人以相等的速度逃跑，这将会是一种没有伤害的接触。但是如果打击部分地落在一个对象上，则冲击将不会有它的全部的效果，破坏将与抛体的速度超过目标后退的速度成比例的；这样，例如，如果射击以速度 10 达到目标，而或者以速度 4 后退，动量与冲击将以 6 来表示。最后，就抛体来说，当目标完全不后退而且如果完全抵抗和阻止了抛体的运动，冲击将是最大的。当涉及抛体时我曾经说过，因为如果目标会逼近抛体，碰撞的冲击会更大，它是与两个速度之和成比例的，它比单独是抛体要大。”

这里伽利略提出只考虑抛体的速度是不够的，还要添加非常重要的考虑去确定打击的

活力。伽利略只是提出了这个问题，书中他远没有解决这个问题。而且这恐怕也就是经典力学后来发展的两条路径的起点。

§2 第一条路线的完成

1644 年法国科学家笛卡尔（B. Descartes, 1596-1650）在他的著作《哲学原理》中讨论了碰撞问题，他提出了 8 条定律，虽然这些定律都不正确，不过他引进了严格的动量的概念。

1668 年英国皇家学会提出碰撞问题的悬赏征文。应皇家学会的邀请，瓦里斯（J.Wallis，1616－1703）、雷恩（C.Wren,1632－1723）、和惠更斯参加了这项研究。不久，三个人都交出了各人按不同方式研究写成的论文，他们都在这个问题上作出了贡献。

瓦里斯讨论了非弹性体沿它们重心联线运动时的碰撞，同时也讨论了斜碰撞的情形，随后于 1671 年还发表了弹性碰撞的结果。他在讨论中利用了动量的概念。他的结果是：若令 m 与 m_1 的速度分别为 v 与 v_1，碰撞后的公共速度为 u 则有在同向运动时 $u=\frac{mv+m_1v_1}{m+m_1}$， 在反向运动时 $u=\frac{mv-m_1v_1}{m+m_1}$。现在看来，这就是碰撞后两个物体粘在一起时的动量守恒定律。

雷恩与鲁克合作做了碰撞的实验，于 1668 年提交了论文。马略特在论文《论物体的撞击与碰撞》中描述了这些实验。

马略特(E. Mariotte,1620－1684)是法国教士，又是惠更斯的朋友。他写过《水和其他流体的运动》，讨论了流体的浮力、射流等流动。在 1677 年还写了论文《论物体的撞击与碰撞》描述了雷恩等球的碰撞实验。利用这实验马略特证明了动量守恒定律。

牛顿在 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》书中明确提出了后人称之为的牛顿第二定律。牛顿的表述是：“定律 II　运动的变化永远跟所加的外力成正比，而且是沿着外力作用的直线方向发生的。”这也就是式（1）的另一种表述。

至此，经典力学沿着第一条路径的发展就基本完成了。如果第一条路线的研究开始于 1644 年笛卡尔提出准确的动量概念，那么，到 1687 一共只有四十多年。而沿着第二条路径的发展却刚刚开始。却花费了将近两个世纪之多的漫长岁月。

§3　第二条路线的进程

1669 年，惠更斯在论文《论物体的碰撞运动》中对碰撞问题进行了系统的讨论。他讨论的前提是：惯性定律，碰撞是完全弹性的。在这样的条件下他提出 13 个命题，得到了一些重要的定律。如：“两个物体相互碰撞时，它们的质量乘其速度平方之和在碰撞前后保持

不变。”这个定律正好是莱布尼兹关于活力定律的表述。莱布尼兹的叙述是：“宇宙是一个不与其他物体进行交换的物体系统，所以，宇宙始终保持同样的力。”

通过碰撞问题的研究，产生了早期的动量守恒与动能守恒定律的表述。这样，瓦里斯、雷恩和马略特在碰撞问题上沿着动量的路线讨论，而惠更斯则是沿着动能或者说是沿着活力的路线来讨论的。

莱布尼兹对活力的研究是从反对笛卡尔的动量开始的。1686年，他投给《学术学报》（Acta Eruditorum）一篇论文，反对以质量与速度的乘积作为力的度量。之后笛卡尔派与莱布尼兹派就这个问题争论了多年，这场争论几乎席卷了欧洲所有各国，延续了数十年之久。最后法国学者达朗贝尔（Jeanle le Rond d'Alembert,1717－1783）于1743年在他的书《论动力学》中指出，整个争端只不过是一场关于用语的无谓争论。他指出，“对于量度一个力来说，用它给予一个受它作用而通过一定距离的物体的活力，或者用它给予受它作用一定时间的物体的动量同样都是合理的。”在这里，达朗贝尔揭示了活力是按作用距离力的量度，而动量是按作用时间力的量度，这个结论是非常确切的。

莱布尼兹认为，以落体运动来说，物体升起的高度是与初速度的平方成正比，因之作用在物体上的力的效应必定是与其重量所给予的速度平方而不是速度成正比的。当时莱布尼兹取 mv^2 为活力，而不是用 $\frac{1}{2}mv^2$ 。

以现在的语言来说，令 w 为加速度，f 为力，m 为质量，v 为速度，s 为距离，则

$$mw=f \qquad \text{牛顿第二定律}$$

是与 $$d(\tfrac{1}{2}mv^2)=f\cdot ds$$ 等价的，在这里，f 被称为死力，$\frac{1}{2}mv^2$ 被称为活力。

到了19世纪20年代，当法国学者科里奥利（Gustave Gaspard Coriolis,1792－1843）引进了功的概念后，即功等于力乘物体在力作用线上的位移，才在前面加上了 $\frac{1}{2}$，成为 $\frac{1}{2}mv^2$ 。

§4 拉格朗日与勒让德的工作

在第二条路线的发展过程中，应当提到的是两件重要的事。即18世纪的拉格朗日和勒让德的工作。

在牛顿的《原理》出版后的101年，也是法国大革命的前一年，即1788年，却在法国出版了一本不含几何推理也没有任何几何插图的力学书。这就是 J.L.拉格朗日(Lagrange)著的《分析力学》。这本书的出版标志了力学发展的一个新阶段。

他首先引进可以完全描述力学系统状态的有限个参数 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 称为广义坐标，后人也称为拉格朗日坐标。其次，他在系统运动时计算系统的动能T，用$\dot{q}_j=\frac{dq_j}{dt}$的函数来表示，并且以 $I=\int_{t_0}^{t_1}Tdt$ 表示作用量，使I最小的$q_j(t)$便是真实运动。拉格朗日称之为最小作用量原理。并且论证真实运动必须满足方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

这里Q_j是作用力在广义坐标中的表达式。如果将他表为q_j的函数，且是有势力的情形，即

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

这时若令$L=T-V$,则有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

这个方程称为第二类拉格朗日方程，函数L是 S.D.泊松引进的称为拉格朗日函数。

如果说拉格朗日所引进的拉格朗日函数是一种作用量，随后，拉格朗日的学生勒让德引进的勒让德变换就允许把这个函数以的别的自变量来表述。1787 年，勒让德在蒙日关于最小曲面研究的启发下，给出了勒让德变换。勒让德变换在力学和物理上的应用，可以把作用量的自变量换成与原来变量对偶的变量。由此就可以发展出一系列的另外的作用量和运动方程的新的表述形式。后来的哈密尔顿力学与雅科比力学，都可以由此推出。

勒让德变换是从以下偏微分方程出发的

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x^2}+S\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y^2}=0 \qquad （3）$$

其中令$\partial z/\partial x=p,\partial z/\partial y=q$，再令$R$、$S$、$T$仅是$p$、$q$函数，令曲面$z=f(x,y)$的切平面为

$$px+qy-z-v=0, \qquad （4）$$

则应当有

$$R\frac{\partial^2 v}{\partial^2 p^2}-S\frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q}+T\frac{\partial^2 v}{\partial^2 q^2}=0 \qquad (5)$$

（4）式就在函数变量 x,y 与 p,q 之给出了一个变换。

即 $$\partial z/\partial x=p,\partial z/\partial y=q;\partial v/\partial p=x,\partial v/\partial q=y。$$

由(4)微分得

$$xdp+pdx+ydq+qdy-pdx-qdy-\frac{\partial v}{\partial p}dp-\frac{\partial v}{\partial q}dq=0$$

即$\frac{\partial v}{\partial p}=x,\frac{\partial v}{\partial q}=y$，　由此$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q} & \frac{\partial^2 v}{\partial q^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q}\\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q}\end{pmatrix}.$

同样因为$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\frac{\partial z}{\partial y}=q$,由此$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y}\end{pmatrix}.$

考虑到上面两个式子的右端一个和另一个的转置互逆。就有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 v}{\partial q^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2},$$

其中$\Delta=\begin{Vmatrix}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q} & \frac{\partial^2 v}{\partial q^2}\end{Vmatrix}$

把以上结果代入（3）就得到（5），这一变换可以把一个拟线性方程化归为一个线性方程求解。

把以上思想推广。设有 n 个自变量 $q_1,q_2,\dots,q_n$ 的函数

$$U=U(q_1,q_2,\dots,q_n)$$

它具有直到二阶的连续微商，取新的一组变量

$$Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\dots,n) \qquad (6)$$

它们组成对 $q_1,q_2,\dots,q_n$ 的一组变量替换，设其 Jacobi 行列式

$$\left\|\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right\| = \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right\| \neq 0$$

从（6）就可以把原变量反解出来。得

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad （7）$$

考虑新函数

$$U^c = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i - U \qquad （8）$$

可以证明 $$q_i = \frac{\partial U^c}{\partial Q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad （9）$$

在勒让德变数替换下，两个函数 U，和 U^c 的关系由（8）给出，对应的变量与函数的关系由（6）和（9）给出。它概括了力学与物理上各种作用量之间的关系。

§5 静力学的两种路线

上面所说的关于动力学研究的两条路线，可以追溯到静力学的研究中。一条路线是直接研究力的性质与平衡，我们现今采用的工程力学教材中，大多是沿着这条路径展开讨论的；另一条路线是研究位移并且把位移和外力在位移上做功联系起来，这就是从虚位移原理来讨论平衡。实际上，位移和力所表述的空间是相互对偶的，把一个的性质搞清楚了，另一个也就清楚了。以下我们采用第二条路径的方法，就刚体的平衡与位移来讨论。

设在空间中有 m 个质点，每个质点引进一个位移 $\boldsymbol{u}_i (i = 1, \cdots, m)$，则这些位移构成一个 n=3m 维的向量空间 $\mathbf{L}^{3m} = \underbrace{\mathbf{L}^3 \otimes \mathbf{L}^3 \otimes \cdots \otimes \mathbf{L}^3}_{m}$，而它的对偶空间相当于在每一点上给定一个力 $\boldsymbol{F}_i$，由这些力所构成的 3m 维空间 $\boldsymbol{L}'^{3m}$。

显然这个力系在任意位移上做功为零的条件为：

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{F}_i \cdot \mathrm{u}_i = 0 \qquad (12)$$

如果我们给定的位移并不是任意的，比如说 m 个质点是约束在同一个刚体上，则 $\boldsymbol{u}_i$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_0 + \Omega \times \boldsymbol{r}_i \qquad (13)$$

这里$\boldsymbol{u}_0$与Ω为两个任意的常向量，$\boldsymbol{r}_i$为空间质点的坐标向量。在这一段的讨论中，我们采用通常三维空间中向量的运算。将（13）式代入(12)式，得：

$$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{u}_0+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_i\cdot(\Omega\times\boldsymbol{r}_i)=(\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_i)\cdot\boldsymbol{u}_0+\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)\cdot\Omega=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{M}\cdot\Omega=0$$

由于$\boldsymbol{u}_0$与Ω的任意性，有：

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_i=0\\ \boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=0\end{cases}\tag{14}$$

这就是刚体的平衡条件。

同样，考虑作用在各点的力系任意变化下都做零功的位移所满足的条件，即考虑(12)式在$\boldsymbol{F}_i$满足刚体平衡条件(14)时位移场应当满足的约束条件。在这种情形下，我们把(12)与(14)两式联立，寻求$\boldsymbol{F}_i$任意变化下$\boldsymbol{u}_i$的解空间。为此，将(14)式的两个等式分别乘以待定乘子$\boldsymbol{u}_0$与Ω两个向量后与(12)式相减，得：

$$\sum_{i=1}^{m}\mathrm{F}_i\cdot\mathrm{u}_i-\sum_{i=1}^{m}\mathrm{F}_i\cdot\mathrm{u}_0-\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{r}_i\times\mathrm{F}_i)\cdot\Omega=0\tag{15}$$

显然(15)式可以化为：

$$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_0-\Omega\times\boldsymbol{r}_i)=0\tag{16}$$

由于上式中$\boldsymbol{F}_i$是任意变化的，于是我们得到：

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_0+\Omega\times\boldsymbol{r}_i\tag{17}$$

这也就是刚体位移的约束条件。

上面所讨论的刚体在两个相互对偶的空间内满足做零功的相互对偶的两个条件，就是刚体力学中的静力平衡条件（（14）式）和运动学几何条件（（17）式）。

§6　结论

通过以上的讨论，我们至少可以有以下几点认识：

第一，　　把经典力学不加区分地称为牛顿力学，是不十分合适的。牛顿是完成第一

条路线的大师，但对第二条路线来说，很难说有多少贡献。

第二，　经典力学的这两条路线，可以追溯到力学的静力学中。在静力学的研究中，也一直存在着两种不同的方法。一种是直接从力的平衡着手讨论。另一种是从力系被扰动后系统的行为来讨论的。前者是从力、而后者是从几何来讨论的。或者从力学上来说，前者是平衡，后者是虚功原理。从几何上来说前者与后者是在互相对偶的空间中来讨论的。

第三，　恩格斯说："mv 是以机械运动来量度的机械运动；$\frac{1}{2}mv^2$ 是以机械运动所具有的变为一定量的其他形态的运动的能力来度量的机械运动。这两种量度因为性质互不相同，所以并不互相矛盾。"可见，沿着第一条路线的研究，只是解决了前一类问题，而后一类问题是属于第二条路线的事。

第四，　现今在大学力学教学体系上，主要是按照第一条研究路线来整理材料的。而把动能定理纳入它的框架内。可能是由于第一条路线完成得早而"先入为主"吧。从虚功原理开始的分析力学，要么不讲，要么分量很小。这和经典力学在现今整个科学中的地位是不相称的，近代科学的发展，恰恰需要加强分析力学部分。而这只有少数教材才反映这种要求的，如朗道栗复希兹的《力学》和阿诺尔德的《经典力学的数学方法》。

致谢：本文受到国家自然科学基金 10172002 项目的资助，特致谢意。

参考文献

〔1〕　恩格斯，《自然辩证法》，人民出版社，1957 年，第 72 页。

〔2〕　武际可，《力学史》，重庆出版社，2000 年。

在第九届现代数学和力学学术会议（MMM-IX）2004 年 10 月 4－7 日，（ 上海）宣读