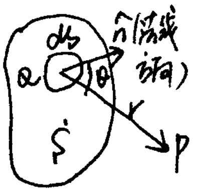
一、惠更斯-菲涅耳原理：

惠更斯原理：任何时刻波面上的点都可以作为次波的波源，各自发出球面次波，在以后的任何时刻，包络波面的包络面形成新的波前。

在惠更斯原理中忽略了向后传播的波，否则将会形成倒退波。

菲涅耳对惠更斯原理进行了补充，并假设次级波面的相干叠加，形成了惠更斯-菲涅耳原理：



波面S上每个面积元ds都可以看成是新的波源，它们均发出球面次波，波面前方空间某一点P的振动可以看成是S面上所有面积元发出的次波在P点引起的振动之和。面元ds在P点的振动 $du(p)=\frac{A(Q)e^{ikr}}{r}K(\theta)ds$

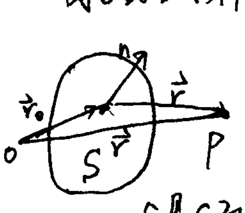
其中$A(Q)$为波面S上的Q点的振幅分布，$K(\theta)$为倾斜因子，并且假定$K(\theta)$在$\theta=0$处取得最大值，并随θ的增大迅速减小。其实倾斜因子反映了次级波源和P点引起振动的程度，向前传播的成分对P点振动的贡献最大。P点的合振动为 $u(p)=\int\frac{A(Q)e^{ikr}}{r}K(\theta)ds$

惠更斯-菲涅耳原理(H-F)的基本概念是，P点的振动是此点和波源之间某个面上所发出的各个次波的叠加。但H-F原理没有严格的数学基础。基尔霍夫给H-F原理中的叠加思想奠定了比较完善的数学基础，并指出H-F原理是在远场$r\gg\lambda$时的近似。

二、基尔霍夫理论

考虑标量波的波动方程：$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-f(\vec r,t)$

其中ϕ是标量波的振幅，c是传播速度，$f(\vec r,t)$为源。假设源分布在体积V内，S是V的闭合曲面。利用基尔霍夫处理波动方程的方法，可得在V外任意点$\vec r$处的振幅



$$\phi(\vec r,t)=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]+[\phi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]\right\}ds \qquad (1)$$

[ ]表示推迟值，即$(t-\frac{r}{c})$时刻的函数。ϕ是S面上的振幅，$|\vec r|=|\vec r'-\vec r_0|$

$\vec n$是S面上源点的法线方向，正好把V内各点源的贡献可以用表面上的等效源来表示。(1)中右边大括号中的第一项反映了一个波源分布的贡献，波源的强度为每单位面积$\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)$，大括号中的后两项联合起来代表了一个偶极子分布的贡献，偶极子的强度为每单位面积$\frac{\phi}{4\pi}$，方向垂直于S面。

在基尔霍夫积分定理中，空间任一点P的振动可以看成是两种类型的光源在P点引起振动的叠加，这样H-F原理中任一点的振动可以看作是简单次波源引起振动的叠加的思想不再成立。如果把包围源的闭合曲面S看成是波前的话，那S上的次波源可以看作是什么呢？

如果在面S上每一点，选择三个相互垂直的曲线坐标 $\hat{n}$（法线方向），$\hat{q}_2$、$\hat{q}_3$，并且满足

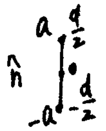
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} \gg \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_2^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_3^2}\ ，（傍轴条件）$$

则此时的闭合曲面S可以看作是一个波前，并且三维振动方程可以化简为一维的情况 $\nabla^2 \to \frac{\partial^2}{\partial n^2}$。对于单色波，$\varphi \sim e^{i(wt-kn)}$，可得 $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -ik\varphi$，$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = iw\varphi$，$\frac{\partial r}{\partial n} = -\cos\theta$，$\theta$为 $\hat{n}$ 与 $\vec{r}$ 的夹角，

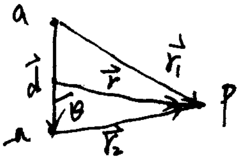
则基尔霍夫积分定理中的被积函数可以表示为：

$$\frac{1}{4\pi}\left\{-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]+[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\} = \frac{[\varphi]}{4\pi r}\left\{ik(1+\cos\theta)+\frac{\cos\theta}{r}\right\} \qquad (2)$$

为了理解(2)式所代表的物理意义，我们来考虑一个沿 $\hat{n}$ 方向的 spatiotemporal dipole 源：



在 $\frac{d}{2}$ 处有个强度为 a 的点源，在 $-\frac{d}{2}$ 处放置一个强度为 $-a$ 的点源，并且其后者滞后 $\tau = d/c$ 的时间，即光从第一个点源传播到第二个点源的时间。这样放置的偶极子我们叫做 spatiotemporal 偶极子。我们考虑这样的偶极子在空间点P点引起的振动：



$$u(p) = \frac{a}{4\pi r_1}\exp[i(wt-kr_1)] - \frac{a}{4\pi r_2}\exp\left\{i\left[w\left(t-\frac{d}{c}\right)-kr_2\right]\right\}$$

$ad = c$ 常数

令 $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{d}$，将 r_1 按 d 的幂级数展开，则 $r_1 = r_2 + d\frac{\partial r_2}{\partial n}$，在 $d \to 0$ 的极限下，将 r_2 用 r 代替，最终可得

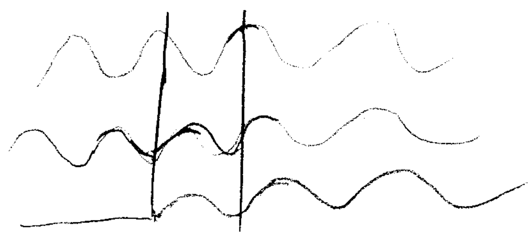
$$u(p) = \frac{ad}{4\pi r}\exp[i(wt-kr)]\left\{ik(1+\cos\theta)+\frac{\cos\theta}{r}\right\} \qquad (3)$$

，如果令 $ad\exp[i(wt-kr)] = [\varphi]$，则(3)与(2)式完全相同。即当包围源的闭合曲面S是波前时，S面上的有效光源在P点引起的振动可以等效为方向沿S面法线方向、强度为 ad 的 spatiotemporal 偶极子在P点引起的振动叠加。

这样基尔霍夫定理可以表述为：空间中任一点的振动可以看作是波面上的有效次源，spatiotemporal 偶极子，在P点引起振动的叠加。即将H-F原理中的点源换为 spatiotemporal dipole，H-F原理中空间中任一点的振动可以看作是波面上简单次波源在P点引起振动叠加的思想就完全成立。由于整个过程只是在理解闭合曲面S上的等效源问题，并没有对观测点P的距离r作出任何要求，因此所得结论在 $r \to \lambda$ 的近场也是成立的。

结论：H-F方程中的波前上的每一点都可以等效为向前辐射源(点源)的思想本来是基尔霍夫在远场 $r \gg \lambda$ 时的近似，但是将包围源的闭合曲面看作是波前时，空间中任一点的振动都可以看作是波前上的辐射源，spatiotemporal dipole，在观测点引起振动叠加的思想在远场和近场，$r \gg \lambda$ 和 $r \ll \lambda$ 处均成立，因此H-F方程的思想在近场中也就成立了。

将基尔霍夫定理中的两种类型的光源用一种光源来代替后，波的传播问题变成怎样？是不是向前传播的呢？考虑 spatiotemporal dipole 中的点源产生平面波的情况。spatiotemporal dipole 可以看作是由两个符号相反相距为 d 的点源组成，其中一个点源落后于另一个点源 $\frac{d}{c}$ 的时间。当 $d \to 0$ 时，就会变为精确的 spatiotemporal dipole。每个点源都会产生向左右两个方向传播的平面波，但向左传播的波相互抵消，最终只产生向右传播的波，即产生向前传播的波，如图所示：



三、被物质散射后的近场

我们现在来考虑H-F方程中的倾斜因子。倾斜因子反映了波前上的次级波源在空间一点引起振动的权重。$\theta=0$ 时，$K(\theta)$ 最大，即向前传播的子波贡献最大，因此倾斜因子的存在反映了波前向前传播的性质。我们把倾斜因子是否存在来作为检验H-F方程中向前传播的思想是否成立。

在上面的讨论中，将Kirchhoff积分定理中，表面S上的辐射源等效为spatiotemporal dipole中，~~由于~~存在了对 θ 角度的依赖，(3)所示，因此反映了波前向前传播的性质。其实，波前向前传播的性质可以不通过上面的方法得到，只需要作傅里叶变换即可。

如果一个平面波在 $z=0$ 处的振动情况已知，即 $\phi(x,y,0)$ 已知，根据傅里叶变换可得角谱

$$\Phi(k_x,k_y,0)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint dx'\,dy'\,\phi(x',y',0)\exp[-i(k_x x'+k_y y')]$$

从 $z=0$ 到 z，角谱的传播为

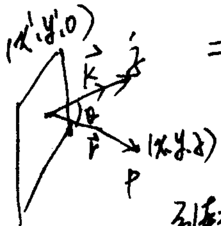
$$\Phi(k_x,k_y,z)=\Phi(k_x,k_y,0)\exp\left[iz\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\right] \qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

作逆傅里叶变换，可得在 (x,y,z) 处的振动情况

$$\phi(x,y,z)=\iint \Phi(k_x,k_y,z)\exp[i(k_x x+k_y y)]\,dk_x\,dk_y$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint dx'dy'\,\phi(x',y',0)\iint dk_x\,dk_y\,\exp\{i[k_x(x-x')+k_y(y-y')+\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\,z]\}$$

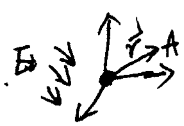
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint dx'dy'\,\phi(x',y',0)\left[\cos\theta\frac{\exp(ikr)}{r^2}(\cancel{[illegible]}\,kr+i)\right]$$



可知，空间中任一点(x,y,z)的振动可以看成是所有(x',y',0)平面上的次波源在(x,y,z)引起振动的叠加，并且θ=0处的次波源对P点的贡献最大，因此时θ余弦的取值，倾斜因子的存在反映向前传播的特性，同时对r的大小没有限制，因此在r<<λ的近场中仍是成立的。

在上面的近场中，只是光源附近没有物质的情况，但在实际情况中，往往要考虑有物质存在，即被物质散射而造成的光场性质。考虑位于坐标原点的一个小粒体，入射场为E_i，在该粒体上引起的极化强度

$P(t)=\alpha E_i\exp(-i\Omega t)$，(只考虑线性极化情况)，Ω是入射场的圆频率。



现在研究被粒体散射后$A(\vec r)$处的振动情况，A处的振动情况应由赫兹矢量方程得到。引入赫兹矢量$\vec\pi_e$，(赫兹矢量与标势中的关系，$\phi=-\nabla\cdot\vec\pi_e$)，可得$\vec r$处的赫兹矢量

$$\vec\pi_e(t,\vec r)=\frac{[\vec P(t,\vec r)]}{r}$$

对赫兹矢量作傅里叶变换：

$$\vec\pi(\vec k)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec r^3\,\pi(\vec r)\exp(-i\vec k\cdot\vec r)\qquad (k为复数)$$

需要注意的是，$\vec r$处的光场实质上是被粒体(原点处)散射后产生的，而散射场应包含两种类型的波，均匀波(k值为实数)和倏逝波(k值为复数)。对$\pi(\vec k)$作逆傅里叶变换，可得

$$\pi(\vec r)=\frac{\alpha}{(2\pi)^2}\frac{1}{k}\vec E_i\int d\vec k^3\exp(i\vec k\cdot\vec r)\lim_{\eta\to0}\left(\frac{1}{\hat k-k-i\eta}-\frac{1}{\hat k+k+i\eta}\right)\quad(14)$$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$。在远场条件下，r>>λ，对(14)积分仍可得到倾斜因子，即从上节中向前传播的性质在散射场的近场中仍成立。现在将(14)式积掉角坐标，在对角度坐标θ积分时，存在一个最大值θ_{max}，取值依赖于r的大小，当$\theta>\theta_{max}$时，积分为0。这样在对角坐标积分的过程中，由$\theta<\pi$可转化为$0<\theta<\theta_{max}$，积掉角坐标后的赫兹矢量：

$$\pi(\vec{r})=\frac{\alpha}{2\pi i k r}E_i(0)\Big[2\pi i k\exp(-ikr)+\int_0^{\infty}du\,u\exp(-ru)\left(\frac{1}{iu-k}-\frac{1}{iu+k}\right)$$
$$-\int_0^{\infty}du\,u\exp(ru\cos\theta_{max})\left(\frac{1}{iu-k}-\frac{1}{iu+k}\right)\Big]\qquad 15)$$

当$r\to\infty$时，$\theta_{max}=\pi$，上式中最后一项代表了传播方向与观测方向成π角度的成分对观测点的贡献。这时的 $\exp(ru\cos\theta_{max})\to\exp(-ru)\to 0$，即向后传播的成分对观测点处的振动没有贡献，反映了远场中向前传播的性质。

在近场，$r\ll\lambda$处，光场的性质主要由上式中的后两项决定，即非辐射波决定了近场的性质（5式的对u积分中含有$\frac{1}{r}$的因子，因此后两项决定了光场的性质）。由于这时没有倾斜因子的存在，就反映不出向前传播的成分对观测点贡献的大小，也即向各个方向传播的成分对观测点的贡献相同，不能得到波前向前传播的结论，因此H-F原理中向前传播的易解释在非辐射场的近场中不成立。